PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITETA U SARAJEVU

Branko Ćurgus

DEFINITIBILNI OPERATORI U KREINOVIM PROSTORIMA. PRIMJENE NA OBIČNE HERMITSKE DIFERENCIJALNE OPERATORE SA INDEFINITNOM TEŽINSKOM FUNKCIJOM

doktorska disertacija

Mentor: Prof. Dr. Heinz Langer
Technische Universität Dresden, DDR

Sarajevo, oktobar 1985

Ovaj rad je uglavnom napisan u toku mog boravka na Tehničkom univerzitetu u Drezdenu, Njemačka Demokratska Republika, od oktobra 1983. do februara 1985. U ovom periodu imao sam sreću da sarađujem sa Prof. dr Heinzom Langerom i koristim obilje njegovih ideja i podsticaja. Takođe sam imao stalnu podršku i Prof. dr Fikreta Vajzovića.

Sa zahvalnošću ističem da mi je boravak na Tehničkom univerzitetu u Drezdenu omogućila stipendija vlade Njemačke Demokratske Republike, ostvarena preko Republičkog zavoda za međunarodnu naučno-tehničku i kulturno-prosvjetnu saradnju SR BiH, kao i stipendija SIZ-a nauke SR BiH.

S A D R Ž A J

0. UVOD

0.1. Glava I

Jedan od najvažnijih problema u vezi sa hermitskim operatorima u Kreinovim prostorima je pitanje egzistencije spektralne funkcije. Egzistenciju spektralne funkcije, kao i njene osnovne osobine, za hermitske operatore u Pontrjaginovim prostorima dokazali su M.G. Krein i H. Langer u radu [38]. H. Langer je u radu [41] (vidite takođe [47]) poopštio ove rezultate na definitibilne operatore u Kreinovim prostorima. Drugačiji dokaz postojanja spektralne funkcije definitibilnih operatora dao je P. Jonas u [23]. Jedna od osobenosti spektralne funkcije definitibilnih operatora je mogućnost postojanja kritičnih tačaka na realnoj osi. Pitanje regularnosti ovih kritičnih tačaka je od posebnog interesa. Prve karakterizacije regularnosti kritičnih tačaka date su u radovima [38] i [41] (vidite i [47]). Kriteriji regularnosti kritičnih tačaka definitibilnog operatora A u radovima K. Veselića [59], P. Jonasa [24], [25] i R.V. Akopjana [1] dati su pomoću uniformne ograničenosti određenih familija operatora, koje su funkcionalnim računom povezane sa operatorom A. Jedna od primjena ovih kriterija je u proučavanju očuvanja regularnosti kritičnih tačaka pri perturbacijama operatora. Ovaj problem razmatran je u radovima [59], [22], [24], [25].

U glavi I ovog rada, koja većim dijelom (osim odjeljka 5) slijedi izlaganje u radu [9], dajemo više kriterija regularnosti kritične tačke beskonačno definitibilnih operatora. Ovi kriteriji bitno se razlikuju od do sada poznatih kriterija. Naime, oni se izražavaju preko nekih osobina domena $\mathcal{D}(A)$, definitibilnog operatora A, kao i preko osobina skupa $\mathcal{D}[JA]$ koji je usko povezan sa domenom $\mathcal{D}(A)$. Ovdje je J fundamentalna simetrija Kreinovog prostora. U odjeljku 1 ove glave definiše se skup $\mathcal{D}[JA]$ i daju se neke njegove osobine. Pored toga daju se dovoljni uslovi pri kojima nepraznost rezolventnog skupa $\rho(A)$, operatora $A = JB$, povlači nepraznost rezolventnog skupa operatora JB^{2^m}, m pozitivan cio broj. Pitanje nepraznosti rezolventnog skupa je bitno prilikom razmatranja definitibilnosti operatora i navedeni rezultat se u tom smislu koristi u odjeljku 3 ove glave. U odjeljku 2 ove glave dati su kriteriji regularnosti kritične tačke beskonačno za strogo pozitivne operatore u Kreinovim prostorima. Osnovni **rezultati ovog** odjeljka sadržani su u teoremu I.2.5 . Jedna od karakterizacija regularnosti kritične tačke beskonačno iz ovog teorema data je pomoću ekvivalentnosti dvaju normi na skupu $\mathcal{D}[JA]$. Ova karakterizacija povezuje jedan rezultat iz rada [32] sa ranijim rezultatima iz radova [42] , [21] , [4] . Naime u radu [32] dat je primjer strogo pozitivnog operatora u Kreinovom prostoru za koji norme iz naše karakterizacije nisu ekvivalentne, što je ekvivalentno sa singularnošću kritične tačke beskonačno. U radovima [42] , [21] , [4] konstruisani su upravo operatori sa singularnom kritičnom tačkom beskonačno. U odjeljku 3 data su poopštenja nekih od kriterija iz odjeljka 2 na definitibilne operatore. Između ostalog dokazuje se da tačka beskonačno nije singularna kritična tačka definitibilnog operatora A ako i samo ako u Kreinovom prostoru postoji pozitivan ograničen operator W sa ograničenim inverznim operatorom (tj. $0 \in \rho(W)$) takav da je $W\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ (ili $W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$) . Dalje se daju i primjene ovih kriterija. Na primjer, pokazano je da za nenegativan definitibilan operator $A=JB$ i $\mu \in (0,+\infty)$ takav da je operator JB^{μ} definitibilan vrijedi: tačka beskonačno je singularna kritična tačka operatora A ako i samo ako je tačka beskonačno singularna kritična tačka operatora JB^{μ}. U odjeljku 4 kriteriji regularnosti iz odjeljka 3 koriste se da se dokaže očuvanje regularnosti kritične tačke beskonačno pri nekim aditivnim perturbacijama operatora koje mijenjaju domen. U stvari, za aditivne perturbacije posmatrane ovdje, a koje su u vezi sa aditivnim perturbacijama proučavanim u [59] , [24] , [25] , pokazuje se da one ne mijenjaju skup $\mathcal{D}[JA]$, pa se primjenjuje navedeni kriterij iz odjeljka 3 . U odjeljku 5 glave I daje se karakterizacija skupa $\mathcal{D}[JA]$ pomoću spektralne funkcije operatora A . Ova karakterizacija je analogna sa karakterizacijom skupa $\mathcal{D}[JA]$ pomoću spektralne funkcije operatora JA , koja slijedi iz jednakosti $\mathcal{D}[JA] = \mathcal{D}(|JA|^{1/2})$.

0.2. Glave II i III

S obzirom na primjene teorije operatora najvažnija posebna klasa operatora su diferencijalni operatori. U ovom radu bavimo se običnim hermitskim diferencijalnim operatorima koji su u odgovarajućim Hilbertovim ili Kreinovim prostorima pridruženi diferencijalnoj jednačini oblika

$$\ell(f) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(p_{n-k}f^{(k)})^{(k)} = \lambda rf \quad \text{na intervalu } (a,b), \qquad (2.1)$$

gdje je $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ i koeficijenti $1/p_0$, $p_1, \dots, p_n$, r su lokalno integrabilne realne funkcije na (a,b) i pri čemu nepoznata funkcija f zadovoljava izvjesne "rubne uslove" u tačkama (tj. u okolini tačaka) a i b . U slučaju kada je $-\infty < a < b < +\infty$ i kada su koeficijenti jednačine (2.1) integrabilne funkcije na $[a,b]$ kažemo da je problem (2.1) regularan na $[a,b]$. Proučavanje jednačine (2.1) pri $n = 1$ i $r \equiv 1$ na (a,b) ima veoma dugačku istoriju kojoj su značajan doprinos dali još J.C.F. Sturm i J. Liouville tridesetih godina devetnaestog vijeka. U ovom radu mi proučavamo jednačinu (2.1) bez dodatnih ograničenja na znak težinske funkcije r , tj. dozvoljava se mogućnost da se funkcija r poništava na skupu pozitivne Lebesgueove mjere i da ona mijenja znak na intervalu (a,b). U vezi sa ovim navedimo da su spektralne osobine regularnog problema (2.1) pri $n = 1$ i $p_0 \equiv 1$, $p_1 > 0$ na (a,b) sa indefinitnom težinskom funkcijom r, ali $|r| > 0$, proučavali još D. Hilbert [20] i M. Mason [51] , [63] početkom dvadesetog vijeka. R. Richardson [58] je bio prvi koji se bavio ovim problemom bez pretpostavke o pozitivnosti koeficijenata sa lijeve strane jednačine. U novije vrijeme, podstaknut djelomično primjenama u linearnoj transportnoj teoriji, obnovljen je interes za probleme oblika (2.1) sa indefinitnom težinskom funkcijom r , spomenimo na primjer radove R. Langer [49], W.N. Everitt [16] H. Kaper i dr. [33] , F.V. Atkinson i dr. [2], R. Beals [5] i druge koje u daljem citiramo.

U radu [52] R.W. McKelvey je nagovijestio mogućnost primjene teorije hermitskih operatora u Pontrjaginovim prostorima na probleme oblika (2.1). Ova teorija iskorištena je u radovima H. Langer [46] i K. Daho i H. Langer [13] kao oruđe u ispitivanju spektralnih osobina jednačine (2.1) pri $n = 1$ i uz pretpostavku o pozitivnosti koeficijenata sa lijeve strane jednačine. Teorija definitibilnih operatora korištena je u radovima K. Daho, H. Langer [14], K. Daho [11] i [12]. U odjeljku 3 treće glave ovog rada koriste se neke od ideja iz rada [14].

U glavi II ovog rada bavimo se hermitskim diferencijalnim operatorima koji su u Hilbertovom prostoru $L^2(a,b,|r|)$ (definisanom u odjeljku II.2) pridruženi jednačini $\ell(f) = \lambda|r|f$ na (a,b). Ovdje je od interesa mogućnost da se težinska funkcija r poništava na skupu pozitivne Lebesgueove mjere. Ovaj problem, u specijalnom slučaju $n = 1$, razmatran je u radu W. Everitt, M.K. Kwong, A. Zettl [17] i u radu [14], a za $n > 1$ uz pretpostavku o pozitivnosti koeficijenata sa lijeve strane jednačine u radovima [11] i [12]. Osnovni rezultati glave II sadržani su u odjeljcima 2 i 7. U odjeljku 2 pokazuje se da je jednačini $\ell(f) = \lambda|r|f$ na (a,b) moguće pridružiti operator u Hilbertovom prostoru $L^2(a,b,|r|)$ i bez pretpostavke IV iz radova [11], [12]. Nakon definicije ovog operatora, u odjeljcima 3, 4, 5 i 6, pokazuje se da i u ovoj opštijoj situaciji vrijede svi rezultati iz knjige Naimarka [56, glava V] koja se bavi specijalnim slučajem $r \equiv 1$ na (a,b). Iz dokaza koji su ovdje dati vidi se kako se postupa sa različitostima koje nastaju zbog opštije situacije. Pored toga, u odjeljku 4 je pokazano da se slučaj kada se težinska funkcija r poništava u okolini rubnih tačaka a i b može posmatrati kao regularan slučaj problema (2.1). Odjeljak 7 glave II posvećen je karakterizaciji skupa $\mathcal{D}[\hat{B}]$, pri čemu je $\hat{B}$ minimalan operator pridružen jednačini $\ell(f) = \lambda|r|f$ na $[a,b]$ u regularnom slučaju i uz uslov $p_0 > 0$ na $[a,b]$. Karakterizacija data ovdje analogna je sa karakterizacijom skupa $\mathcal{D}[\hat{B}]$ u radu M.G. Kreina [37, dio II, §§6,7] gdje je razmatran slučaj $r \equiv 1$ na $[a,b]$.

U glavi III, teorem 2.1 dati su dovoljni uslovi da operator A pridružen problemu (2.1) u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$ bude definitibilan. Na osnovu definitibilnosti pridruženog operatora dobijamo niz rezultata o strukturi njegovog spektra. Ovi rezultati poopštavaju rezultate te vrste u radovima Mingarellija [54], [55]. U propoziciji III.2.15 daju se dovoljni uslovi za diskretnost negativnog dijela spektra operatora A. Ovi uslovi su opštiji od uslova u radu Mikuline [53]. U odjeljku 3 glave III koriste se rezultati iz odjeljaka I.3 i II.7 da se daju dovoljni uslovi da tačka beskonačno nije singularna kritična tačka za definitibilan diferencijalni operator A. Naime, uz izvjesne uslove o težinskoj funkciji r u tačkama u kojima ona minjenja znak, koristeći ideju izloženu u primjedbi I.3.7, konstruisan je operator W koji je ograničen i pozitivan u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$, $0 \in \rho(W)$ i $W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$. Odavde, na osnovu citiranog rezultata iz glave I slijedi da tačka beskonačno nije singularna kritična tačka operatora A. U odjeljku 4 glave III pretpostavljamo da definitibilan diferencijalni operator A ima diskretan spektar i da tačka beskonačno nije singularna kritična tačka operatora A. Tu se dokazuje da operator A ima kompletan skup korjenih vektora, tj. postoji (topološka) baza Kreinovog prostora $L^2(a,b,r)$ koja se sastoji od korjenih vektora operatora A. Dalje se dokazuje da se ova baza može odabrati tako da ortogonalne projekcije (u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$) pozitivnih korjenih vektora iz ove baze na bilo koji maksimalan uniformno pozitivan potprostor $\mathcal{K}_+$ prostora $L^2(a,b,r)$ čine bazu prostora $\mathcal{K}_+$. S obzirom na rezultate odjeljka III.3 ove tvrdnje su poopštenja odgovarajućih tvrdnji iz radova H.G. Kaper, M.K. Kwong, C.G. Lekkerkerker, A. Zettl [31], [32] i R. Beals [6]. Neki od rezultata iz odjeljaka 1,2,3,4 glave III objavljeni su, uglavnom bez dokaza, u radu [10]. U odjeljku 5 ove glave dat je analogon Mercerovog teorema za pozitivne integralne operatore u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$. Koristeći ovaj rezultat i rezultate iz odjeljka I.5 pokazano je da funkcije iz $\mathcal{D}[JA]$ i njihovi izvodi do (n-1)-og reda imaju uniformno konvergentne razvoje po korjenim funkcijama (vektorima) operatora A. Ovaj rezultat objedinjava i poopštava rezultat iz rada M.G. Kreina [37, dio II, 11°] gdje je razmatran slučaj $r \equiv 1$ na $[a,b]$ i rezultat iz radova E. Kamke [29], [30] gdje je razmatran slučaj indefinitne težinske funkcije uz određene pretpostavke o pozitivnosti lijeve strane jednačine (2.1). U odjeljku 5 mi pretpostavljamo da je problem (2.1) regularan na $[a,b]$ i, zbog jednostavnosti, da je $|r| > 0$ na $[a,b]$.

0.3. O notaciji i nekim osnovnim pojmovima

Sa $\mathbb{R}$ označavamo polje realnih, a sa $\mathbb{C}$ polje kompleksnih brojeva. Svi vektorski prostori koji se razmatraju u ovom radu su kompleksni. Pod potprostorom Hilbertovog prostora $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ podrazumijevamo vektorski potprostor prostora $\mathcal{H}$ koji ne mora obavezno biti zatvoren. Pod operatorom u prostoru $\mathcal{H}$ podrazumijevamo linearan operator. Za operator A sa $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{R}(A)$, $\ker(A)$ označavamo područje definicije (domen), područje vrijednosti (rang), nulpotprostor, respektivno, operatora A. Sa $\sigma(A)$ i $\rho(A)$ označavamo spektar i rezolventni skup operatora A. Koristimo definicije hermitskih i simetričnih operatora u Hilbertovim prostorima kako su date u knjizi S. Kurepa [40, str. 408 i 411]. Simbol $\dot{+}$ označava direktnu sumu potprostora, a $\oplus$ označava ortogonalnu sumu potprostora Hilbertovog prostora $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$. Ortogonalnu sumu operatora u prostoru $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ označavamo takođe sa $\oplus$.

Vektorski prostor $\mathcal{K}$ sa (indefinitnim) skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$ nazivamo <u>Kreinov prostor</u> ako postoje potprostori $\mathcal{K}_+$ i $\mathcal{K}_-$ prostora $\mathcal{K}$ takvi da je

1) $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \dot{+} \mathcal{K}_-$,

2) $(\mathcal{K}_+, [\cdot,\cdot])$ i $(\mathcal{K}_-, -[\cdot,\cdot])$ su Hilbertovi prostori

3) $[\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-] = \{0\}$.

Specijalno, ako je $\varkappa = \min\{\dim\mathcal{K}_+, \dim\mathcal{K}_-\} < +\infty$, onda se Kreinov prostor $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ naziva <u>Pontrjaginov prostor sa indeksom</u> $\varkappa$. Dekompozicija 1) sa osobinama 2) i 3) naziva se <u>fundamentalna dekompozicija</u> Kreinovog prostora $\mathcal{K}$. Uvedemo li projekcije $P_\pm x = x_\pm$, pri čemu je $x \in \mathcal{K}$, $x = x_+ + x_-$, $x_\pm \in \mathcal{K}_\pm$, i stavimo $J := P_+ - P_-$ imamo da je

$$(x,y) := [Jx,y] \;,\; [x,y] = (Jx,y) \qquad (x,y \in \mathcal{K}).$$

Ovako definisan operator J naziva se <u>fundamentalna simetrija</u> Kreinovog prostora $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$. Skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$ je pozitivan i prostor $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$ je Hilbertov prostor. Stavljamo $\|x\| = (x,x)^{1/2}$, $x \in \mathcal{K}$. Svi topološki pojmovi u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ podrazumijevaju se u odnosu na topologiju određenu ovako definisanom normom. Ova topologija ne zavisi od fundamentalne dekompozicije 1). Ako je na vektorskom prostoru $\mathcal{K}$ zadat skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$, onda se za vektor $x \in \mathcal{K}$ za koji vrijedi $[x,x] \geq 0$ ($[x,x] \leq 0$, $[x,x] = 0$, $[x,x] > 0$, $[x,x] < 0$, respektivno) kaže da je <u>nenegativan</u> (<u>nepozitivan</u> , <u>neutralan</u> , <u>pozitivan</u> , <u>negativan</u> , respektivno). Za potprostor $\mathcal{L}$ prostora $\mathcal{K}$ kaže se da je <u>nenegativan</u> (<u>nepozitivan</u> , itd. , respektivno) ako su svi vektori iz $\mathcal{L} \setminus \{0\}$ nenegativni (nepozitivni , itd. , respektivno). Za potprostor $\mathcal{L}$ prostora $\mathcal{K}$ kaže se da je <u>uniformno pozitivan</u> (<u>uniformno negativan</u> , resp.) ako je $[x,x] \geq \gamma \|x\|^2$ ($[x,x] \leq -\gamma \|x\|^2$, resp.) za sve x iz $\mathcal{L}$ i za neko $\gamma > 0$. Ortogonalna suma potprostora u odnosu na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ označava se sa $[+]$.

Neka je $\mathcal{L}$ bilo koji podskup Kreinovog prostora $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Stavljamo

$$\mathcal{L}^{\perp} := \{ x \in \mathcal{K} : [x,\mathcal{L}] = \{0\} \} .$$

Ako za potprostor $\mathcal{L}$ vrijedi

$$\mathcal{L} [\dot{+}] \mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{K} ,$$

onda se za potprostor $\mathcal{L}$ kaže da je <u>ortogonalno dopunjiv</u> u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$.

Neka je $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor i S operator u definisan na gustom potprostoru prostora $\mathcal{K}$. <u>Hermitski adjungiran operator</u> S^+ operatora S u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ definisan je na slijedeći način : $\mathcal{D}(S^+)$ je skup svih $x \in \mathcal{K}$ za koje postoji $x' \in \mathcal{K}$ sa osobinom

$$[Sy,x] = [y,x'] \quad \text{za sve} \quad y \in \mathcal{D}(S) ,$$

i za ove x stavljamo $S^+x := x'$. Ako sa S^* označimo hermitski adjungiran operator operatora S u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$ onda vrijedi $S^+ = JS^*J$. Za operator A koji je definisan na gustom potprostoru prostora $\mathcal{K}$ kažemo da je <u>hermitski</u> u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ ako vrijedi $A = A^+$ i <u>simetričan</u> u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ ako vrijedi $A \subseteq A^+$.

Operator Q naziva se <u>ortogonalni projektor</u> u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ ako je $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{K}$, $Q^2 = Q = Q^+$.

Za hermitski operator A u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ kažemo da je <u>definitibilan</u> ako

(a) $\rho(A) \neq \emptyset$.

(b) Postoji realan polinom $p \neq 0$ takav da je

$$[p(A)x,x] \geq 0 \quad (x \in \mathcal{D}(p(A))) .$$

Polinom p sa gornjom osobinom naziva se <u>definitizirajući polinom</u> operatora A .

Za operator A kažemo da je <u>nenegativan</u> (<u>pozitivan</u> , resp. u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ ako je

$$[Ax,x] \geqslant 0 \quad ([Ax,x] > 0 \text{ , resp. }) \quad (x \in \mathcal{D}(A)\setminus\{0\}) .$$

Spektar definitibilnog operatora A koji leži van realne prave sastoji se od najviše konačno mnogo svojstvenih vrijednosti koje su nule polinoma p . Linearni omotač $\mathcal{K}_c$ korjenih potprostora operatora A , koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima operatora A iz skupa $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, je ortogonalno dopunjiv u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Za definitibilan operator A postoji spektralna funkcija, koja može imati kritične tačke na realnoj pravoj (vidite [47], [41], [23]). Da bi ovo objasnili, za konačan skup

$$¢ := \{t_1,\dots,t_k\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$$

(ovdje, i u daljem, $\overline{\mathbb{R}}$ ($= \mathbb{R}\cup\{\infty\}$) označava kompaktifikaciju jednom tačkom realne prave $\mathbb{R}$) označimo sa $\mathcal{B}_¢$ algebru svih Borelovih podskupova Δ skupa $\overline{\mathbb{R}}$ sa osobinom $((\mathrm{Cl}(\Delta))\setminus\Delta)\cap ¢ = \emptyset$ (ovdje $\mathrm{Cl}(\Delta)$ označava zatvorenje skupa Δ u $\overline{\mathbb{R}}$). Preslikavanje E sa $\mathcal{B}_¢$ u skup ortogonalnih projektora u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ naziva se <u>spektralna funkcija operatora</u> A <u>sa kritičnim tačkama</u> $t_1,\dots,t_k$ ako su zaduvoljeni slijedeći uslovi (Δ , Δ_1, $\Delta_2 \in \mathcal{B}_c$):

(1) $E(\Delta_1\cup\Delta_2) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2)$ ako je $\Delta_1\cap\Delta_2 = \emptyset$,

(2) $E(\Delta_1\cap\Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$,

(3) $E(\emptyset) = 0$, $E(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{K}_c$

(4) $\Delta\cap ¢ \neq \emptyset$ povlači da je skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ indefinitan na $E(\Delta)\mathcal{K}$,

(5) $E(\Delta)A = AE(\Delta)$,

(6) $(A|_{E(\Delta)\mathcal{K}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\Delta)$, gdje $A|_{E(\Delta)\mathcal{K}}$ označava restrikciju operatora A na potprostor $E(\Delta)\mathcal{K}$,

Ako je A definitibilan operator i p definitizirajući polinom operatora A , onda postoji spektralna funkcija E sa skupom $¢$ kritičnih tačaka tako da vrijedi

$$¢ \subseteq \{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\} \cup \{\infty\} .$$

Ovdje tačka beskonačno može biti kritična tačka samo ako je stepen polinoma p neparan. Može se pokazati da spektralna funkcija E operatora A ima osobinu

$$(7) \quad [E(\Delta)x,x] \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \text{ako je } p(t)>0 \ (<0,\text{resp.}) \ \text{za sve } t\in\Delta, \Delta\in\mathcal{B}_{\not{c}} .$$

Za kritične tačke spektralne funkcije operatora A kažemo takođe da su kritične tačke operatora A.

Za kritičnu tačku t operatora A kažemo da je <u>regularna</u> ako postoji otvoreni interval Δ_o , $t \in \Delta_o$, koji ima pozitivnu udaljenost od svih drugih kritičnih tačaka operatora A i takav da je skup

$$\{\|E(\Delta)\| \ : \ \Delta\in\mathcal{B}_{\not{c}} , \ \Delta\subseteq\Delta_o\}$$

ograničen. Kritične tačke operatora A koje nisu regularne nazivaju se <u>singularnim</u>. Skup svih kritičnih tačaka operatora A označavamo sa $c(A)$, a skup svih singularnih kritičnih tačaka operatora A označavamo sa $c_s(A)$.

I. O REGULARNOSTI KRITIČNE TAČKE BESKONAČNO DEFINITIBILNIH OPERATORA

I.1. Uvodna razmatranja

1.1. Zbog potpunosti izlaganja navodimo slijedeće tri tvrdnje.

PROPOZICIJA 1.1. Neka su $(\mathcal{H}_1,(\cdot,\cdot)_1)$ i $(\mathcal{H}_2,(\cdot,\cdot)_2)$ Hilbertovi prostori takvi da je $\mathcal{H}_1$ gust podskup u $(\mathcal{H}_2,(\cdot,\cdot)_2)$ i za neku konstantu $c>0$ vrijedi $\|x\|_1 \geqslant c\|x\|_2$ $(x\in\mathcal{H}_1)$. Tada u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_2$ postoji pozitivan hermitski operator sa domenom $\mathcal{H}_1$. Ako je P proizvoljan hermitski operator u $\mathcal{H}_2$ sa $\mathcal{D}(P)=\mathcal{H}_1$, tada je norma $\|\cdot\|_1$ ekvivalentna sa normom grafa

$$x \longmapsto (\|x\|_2^2+\|Px\|_2^2)^{1/2} \qquad (x\in\mathcal{D}(P)=\mathcal{H}_1). \tag{1.1}$$

DOKAZ. Prva izjava ove propozicije slijedi iz teorema 5.36 u [60]. Za normu (1.1) vrijedi

$$(\|x\|_2^2+\|Px\|_2^2)^{1/2} \geqslant \|x\|_2 \qquad (x\in\mathcal{H}_1). \tag{1.2}$$

Zbog toga za normu

$$\|x\|_3 := \|x\|_1 + (\|x\|_2^2+\|Px\|_2^2)^{1/2} \qquad (x\in\mathcal{H}_1)$$

vrijedi $\|x\|_3\geqslant(c+1)\|x\|_2$ i $\|x\|_3\geqslant\|x\|_1$ $(x\in\mathcal{H}_1)$. Prostor $(\mathcal{H}_1,\|\cdot\|_3)$ je kompletan. Stvarno, ako je $(x_n)\subseteq\mathcal{H}_1$ Cauchyjev niz, u odnosu na normu $\|\cdot\|_3$, tada je taj niz Cauchyjev niz i u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$, i u odnosu na normu (1.1). Zbog toga postoje x' i x'' iz $\mathcal{H}_1$ takvi da $x_n\longrightarrow x'$ $(n\longrightarrow+\infty)$ po normi $\|\cdot\|_1$ i $x_n\longrightarrow x''$ $(n\longrightarrow+\infty)$ po normi (1.1). Nejednakosti $\|x\|_1\geqslant c\|x\|_2$ $(x\in\mathcal{H}_1)$ i (1.2) povlače $x'=x''$ i zbog toga $x_n\longrightarrow x'=x''$ $(n\longrightarrow+\infty)$ po normi $\|\cdot\|_3$. Teorem o zatvorenom grafu povlači da su norme (1.1) i $\|\cdot\|_1$ ekvivalentne sa normom $\|\cdot\|_3$. Propozicija je dokazana.

Napomenimo da je u slučaju $0\in\rho(P)$ norma (1.1) ekvivalentna sa normom $x\longmapsto\|Px\|_2$ $(x\in\mathcal{D}(P)=\mathcal{H}_1)$.

TEOREM 1.2. ("Heinzova nejednakost", vidi [39]) Neka su P i P_1 pozitivni hermitski operatori definisani u Hilbertovim prostorima $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ i $(\mathcal{H}_1,(\cdot,\cdot)_1)$, respektivno. Neka je $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}_1$ ograničen operator sa normom M, takav da $T\mathcal{D}(P)\subseteq\mathcal{D}(P_1)$ i

$$\|P_1Tx\|_1 \leqslant M_1\|Px\| \qquad (\ x\in\mathcal{D}(P)\ ) .$$

Tada, za $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ vrijedi $T\mathcal{D}(P^{\alpha})\subseteq\mathcal{D}(P_1^{\alpha})$ i

$$\|P_1^{\alpha}Tx\|_1 \leqslant M^{1-\alpha}M_1^{\alpha}\|P^{\alpha}x\| \qquad (\ x\in\mathcal{D}(P^{\alpha})\ ) .$$

Slijedeći korolar slijedi iz teorema 1.2 i propozicije 1.1.

KOROLAR 1.3. Ako su P_1 i P_2 pozitivni hermitski operatori u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $\mathcal{D}(P_1)=\mathcal{D}(P_2)$, tada je

$$\mathcal{D}(P_1^{\alpha}) = \mathcal{D}(P_2^{\alpha}) \qquad (\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\ ) \tag{1.3}$$

i odgovarajuće norme grafa na $\mathcal{D}(P_j^{\alpha})$ $(j=1,2)$ su ekvivalentne.

U specijalnom slučaju jednakost (1.3) vrijedi za proizvoljan nenegativan α. Stvarno, neka je S hermitski operator ograničen odozdo sa donjim ograničenjem γ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada, za $a\leqslant\gamma$ vrijedi

$$\mathcal{D}((S-aI)^{\alpha}) = \mathcal{D}(|S|^{\alpha}) \qquad (\ \alpha\in[0,+\infty)\ ) . \tag{1.4}$$

Ovu jednakost dobijamo koristeći karakterizaciju elemenata domena iz (1.4) pomoću spektralne funkcije operatora S. Stvarno, funkcija

$$g:\ t\longmapsto (t-a)^{2\alpha}/|t|^{\alpha} \qquad (\ t\geqslant\max\{1,a+1\}\ )$$

je pozitivna i $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=1$. Zbog toga, funkcija g je ograničena i strogo pozitivna, pa vrijedi

$$\mathcal{D}((S-aI)^{\alpha}) = \{x\in\mathcal{H}:\ \int_{\gamma}^{+\infty}(t-a)^{2\alpha}d(F_tx,x) < +\infty\}$$

$$=\{x\in\mathcal{H}:\ \int_{\gamma}^{+\infty}|t|^{2\alpha}d(F_tx,x) < +\infty\} = \mathcal{D}(|S|^{\alpha}) .$$

Ovdje F označava spektralnu funkciju operatora S.

1.2. Neka je A hermitski operator u Kreincovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Prema propoziciji 1.1 topologija generisana na $\mathcal{D}(A)$ normom grafa u odnosu na operator JA ne zavisi od izbora fundamentalne simetrije J. Skup $\mathcal{D}(A)$ sa ovom topologijom označavaćemo sa $\mathcal{D}(A)^{\wedge}$.

Za hermitski operator S u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ sa $\mathcal{D}[S]$ označavaćemo kompletizaciju skupa $\mathcal{D}(S)$ u odnosu na normu $\|(|S|+I)^{1/2}\cdot\|$. Vektorski prostor $\mathcal{D}[S]$ sa topologijom određenom normom $\|(|S|+I)^{1/2}\cdot\|$ označavamo sa $\mathcal{D}[S]^{\sim}$. Pošto operator $(|S|+I)^{1/2}$ ima ograničen inverzni operator vrijedi

$$\|x\| \leqslant \|(|S|+I)^{-1/2}\| \, \|(|S|+I)^{1/2}x\| \qquad (x\in\mathcal{D}(S)),$$

a odavde slijedi $\mathcal{D}[S]\subseteq\mathcal{H}$. Vrijedi $\mathcal{D}[S]=\mathcal{D}((|S|+I)^{1/2})$ i, prema (1.3), $\mathcal{D}[S]=\mathcal{D}(|S|^{1/2})$.

Prema korolaru 1.3 topologija na skupu $\mathcal{D}[JA]^{\sim}$, definisana u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$, ne zavisi od izbora fundamentalne simetrije J.

PRIMJEDBA 1.4. Na osnovu propozicije 1.1 i korolara 1.3 vrijede slijedeće jednakosti

$$\mathcal{D}[JA]^{\sim} = \mathcal{D}[|JA|+I]^{\sim} = \mathcal{D}(J(|JA|+I)^{1/2})^{\wedge},$$

$$\mathcal{D}(A)^{\wedge} = \mathcal{D}(J(|JA|+I))^{\wedge} = \mathcal{D}[(JA)^2]^{\sim}.$$

PRIMJEDBA 1.5. Neka je A hermitski operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ i neka vrijedi nejednakost $[Ax,x]\geqslant\gamma\|x\|^2$ $(x\in\mathcal{D}(A))$ pri čemu realna konstanta γ zavisi od fundamentalne simetrije J, tj. neka je seskvilinearna forma $[A\cdot,\cdot]:\mathcal{D}(A)\times\mathcal{D}(A)\longrightarrow$ ograničena odozdo u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Tada je operator JA hermitski i ograničen odozdo u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,$ Na osnovu primjedbe 1.4 i korolara 1.3 slijedi da je $\mathcal{D}[JA]$ domen zatvorenja seskvilinearne forme $[A\cdot,\cdot]$ (vidi [60, s.122]).

PRIMJEDBA 1.6. Ako je hermitski operator S zadat sa običnim diferencijalnim izrazom sa rubnim uslovima, skup $\mathcal{D}[S]$ je određen glavnim graničnim uslovima, vidi odjeljak 7, glava II ovog rada ili [37,10°], [8,teorem 2.4].

PRIMJEDBA 1.7. Neka je S hermitski operator u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ i neka je $0\in\varrho(S)$. Topologija na skupu $\mathcal{D}[S]^{\sim}$ data je normom $\||S|^{1/2}\cdot\|$. Iz nejednakosti

$$|(Sx,y)| \leqslant \||S|^{1/2}x\| \, \||S|^{1/2}y\| \qquad (x,y\in\mathcal{D}(S))$$

slijedi da se skalarni produkt $(S\cdot,\cdot)$ može neprekidno proširiti na skup $\mathcal{D}[S]$. Tada je $(\mathcal{D}[S],(S\cdot,\cdot))$ Kreinov prostor. Topologija na ovom Kreinovom prostoru određena je normom $\||S|^{1/2}\cdot\|$. Dakle ona se podudara sa topologijom na $\mathcal{D}[S]^{\sim}$. Ovaj Kreinov prostor je Pontrjaginov prostor sa indeksom $\varkappa$ (vidi [47]) ako i samo ako se negativni dio spektra operatora S sastoji od konačno mnogo svojstvenih vrijednosti sa ukupnom višestrukošću $\varkappa$. U ovom slučaju operator S je ograničen odozdo, recimo $S \geq \gamma$, i prema korolaru 1. slijedi da norma $\|(S - aI)^{1/2}\cdot\|$, za $a < \gamma$, generiše topologiju Pontrjaginovog prostora $(\mathcal{D}[S],(S\cdot,\cdot))$.

1.3. Ovdje razmatramo hermitski operator A u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ takav da nula nije svojstvena vrijednost operatora A i stavljamo $B = JA$, J fundamentalna simetrija Kreinovog prostora $\mathcal{K}$. Tada vrijede slijedeće izjave.

(a) Ako je operator BJB definisan na gustom podskupu prostora $\mathcal{K}$, tada je taj operator hermitski u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$ ako i samo ako operatori $B^{-1} \pm aiBJ$ imaju ograničene inverzne operatore za neko (a time i za svako) $a \in \mathbb{R}$.

(b) Rezolventni skup $\rho(JB^2)$ nije prazan ako i samo ako operator $B^{-1} + aiJB$ ima ograničen inverzni operator za neko (a time i za svako) $a \in \mathbb{R}$.

Primijetimo da su operatori $B^{-1} \pm aiBJ$ definisani na skupu $B\mathcal{D}(BJB)$. Da bi dokazali ekvivalenciju (a) pretpostavimo prvo da je operator BJB hermitski u $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Tada operator $I - aiBJB$ ima ograničen inverzni operator za svako $a \in \mathbb{R}$. Operator $B(I - aiBJB)^{-1}$ je kompozicija ograničenog operatora $(I - aiBJB)^{-1}$ koji preslikava prostor $\mathcal{K}$ na $\mathcal{D}(BJB) \subseteq \mathcal{D}(B)$, i zatvorenog operatora B. Odavde slijedi da je operator $B(I - aiBJB)^{-1}$ zatvoren operator definisan na cijelom $\mathcal{K}$, pa je taj operator i ograničen. Lako se vidi da je operator $B(I - aiBJB)^{-1}$ inverzni operator operatora $B^{-1} - aiBJ$. Pretpostavimo sada obrnuto, da operatori $B^{-1} \pm aiBJ$ imaju ograničene inverzne operatore za neko $a \in \mathbb{R}$. Tada su operatori $B^{-1}(B^{-1} \pm aiBJ)^{-1}$ zatvoreni operatori definisani na cijelom $\mathcal{K}$, pa su to i ograničeni operatori. Ovi operatori su inverzni operatori operatora $I \pm aiBJB$. Zbog toga je simetričan operator BJB hermitski u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$.

Dokaz ekvivalencije (b) koristi istu ideju kao dokaz ekvivalencije (a).

LEMA 1.8. Neka je A definitibilan operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$, takav da nula nije svojstvena vrijednost operatora A. Stavimo $B = JA$. Ako je $\mathbb{R} \cap \rho(B) \neq \emptyset$, onda za bilo koji pozitivan cio broj m operator JB^{2^m} ima neprazan rezolventni skup.

DOKAZ. Prvo ćemo dokazati tvrdnju leme za $m = 1$. Neka je $1/b$ realan broj u $\rho(B)$. Spektar operatora A van realne prave sastoji se od konačnog broja tačaka. Zbog toga možemo izabrati realan broj $a \neq 0$ takav da $-ai, ai, i/ab \in \rho(A)$.

1. Broj a izabrali smo tako da operator

$$(A - aiI)(A + aiI) = A^2 + a^2I$$

ima ograničen inverzni operator, tj. $-a^2 \in \rho(A^2)$. Odavde slijedi da je simetričan operator $A^2 + a^2I$ hermitski operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$. Dakle, operator A^2 je hermitski u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ i operator $BJB = JA^2$ je hermitski u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Prema ekvivalenciji (a) operator $B^{-1} - aiBJ$ ima ograničen inverzni operator. Dokazaćemo da je operator $B^{-1} - aiBJ$ gusto definisan. Operator $BJ = JAJ$ je definitibilan u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$. Stvarno, BJ je hermitski operator u $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$, on ima isti definitizirajući polinom kao i A i $\rho(JAJ) = \rho(A) \neq$! Pošto operator BJ ima inverzni operator, skup $\mathcal{D}(BJ) \cap \mathcal{R}(BJ)$ $= \mathcal{D}(B^{-1} - aiBJ)$ je gust u $\mathcal{K}$ i $B^{-1} - aiBJ$ je gusto definisan operator sa ograničenim inverznim operatorom.

2. Prema izboru brojeva a i b operator

$$(JB + \frac{i}{ab}I)(bB^{-1} - I) = bJ - JB + \frac{i}{a}B^{-1} - \frac{i}{ab}I$$

ima ograničen inverzni operator, pa je zbog toga zatvoren.

Slijedi da je operator $\frac{i}{a}B^{-1} - JB$, a zbog toga i operator $B^{-1} + aiJB$, zatvoren. Upoređujući odgovarajuće domene vidimo da vrijedi

$$B^{-1}(I + aiBJB) \subseteq B^{-1} + aiJB \, .$$

Odavde je

$$\mathcal{R}(B^{-1} + aiJB) \supseteq \mathcal{R}(B^{-1}(I + aiBJB)) = \mathcal{D}(B) \, .$$

Vidimo da je operator $B^{-1} + aiJB$ gusto definisan, zatvoren operato: i da on ima gust rang.

3. Vrijedi

$$B^{-1} + aiJB \subseteq (B^{-1} - aiBJ)^* \, , \tag{1.5}$$

gdje * označava adjungovanje operatora u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Prema prvom koraku ovog dokaza operator na desnoj strani relacije (1.5) ima ograničen inverzni operator, pa vrijedi

$$(B^{-1} + aiJB)^{-1} \subset (B^{-1} - aiBJ)^{*-1} \, . \tag{1.6}$$

Prema drugom koraku ovog dokaza operator na lijevoj strani relacije (1.6) je gusto definisan i zatvoren. Zbog toga u (1.6) (a time i u (1.5)) vrijedi znak jednakosti i operator $B^{-1} + aiJB$ ima ograničen inverzni operator.

Ekvivalencija (b) povlači da je $\rho(JB^2) \neq \emptyset$. Dakle, lema je dokazana za $m = 1$. Ako je $m > 1$, dovoljno je primijeniti već dokazanu činjenicu m puta. Lema je dokazana.

Na sličan način pokazaćemo da ako je B hermitski invertibilan operator u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$ takav da je $\rho(B) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ i $\rho(JB^2) \neq \emptyset$, onda je BJB hermitski operator u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$.

Ovaj rezultat je poboljšanje leme 3.1 iz [44] gdje je za pozitivan operator B dokazano da je zatvorenje operatora BJB hermitski operator.

Da bi dokazali navedenu tvrdnju primijetimo da su operatori $B^{-1} \pm aiBJ$, za bilo koji $a \in \mathbb{R}$, zatvoreni operatori sa gustim rangovima. Stvarno, za $b \in \rho(B) \cap \mathbb{R}$ operator $B^{-1} - b^{-1}I$ ima ograničen inverzni operator, pa su operatori

$$(B^{-1} - b^{-1}I)(baiBJ \mp I) = b^{-1}aiJ - aiBJ \mp B^{-1} \pm b^{-1}$$

zatvoreni. Zbog toga su i operatori $B^{-1} \pm aiBJ$ zatvoreni.

Operator B^2J je pozitivan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ i $\rho(B^2J) = \rho(JB^2) \neq \emptyset$ pa za bilo koje $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $ai \in \rho(B^2J)$. S obzirom na inkluzije

$$B^{-1} \pm aiBJ \supseteq B^{-1}(I \pm aiB^2J)$$

odavde slijedi da operatori $B^{-1} \pm aiBJ$ imaju guste rangove.

Imamo da je

$$B^{-1} \pm aiBJ \subseteq (B^{-1} \mp aiJB)^* . \tag{1.7}$$

Prema ekvivalenciji (b) operatori na lijevoj strani inkluzije (1.7) imaju ograničene inverzne operatore i vrijedi

$$(B^{-1} \pm aiBJ)^{-1} \subseteq (B^{-1} \mp aiJB)^{*-1} . \tag{1.8}$$

Prema prethodnim razmatranjima operatori na lijevoj strani inkluzije (1.8) su definisani na cijelom $\mathcal{K}$. Zbog toga u relaciji (1.8) (a tim i u (1.7)) vrijedi znak jednakosti. Dakle operatori $B^{-1} \pm aiBJ$ imaju ograničene inverzne operatore. Ekvivalencija (a) povlači da je BJB hermitski operator u $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$.

I.2. Pozitivni operatori

2.1. U ovom odjeljku razmatramo pozitivan operator A u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot\,,\cdot])$ takav da $0 \in \rho(A)$. Tada vrijedi

$$[Ax,x] = (JAx,x) \geq \|(JA)^{-1}\|^{-1}\,\|x\|^2 = \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|^2 \quad (\, x \in \mathcal{D}(A)\,)$$

i

$$(x,y)_A := [Ax,y] \qquad (x,y \in \mathcal{D}(A)\,)$$

definiše pozitivno definitan skalarni produkt na $\mathcal{D}(A)$. Odgovarajuću normu $\|(JA)^{1/2}\cdot\|$ označićemo sa $\|\cdot\|_A$. Kao i u primjedbi 1.7 skalarni produkt $(\cdot,\cdot)_A$ može se neprekidno proširiti na $\mathcal{D}[JA]$ i $(\mathcal{D}[JA],(\cdot,\cdot)_A)$ je Hilbertov prostor.

PRIMJEDBA 2.1. Operator $A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]}$ preslikava $\mathcal{D}[JA]$ u $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}[JA]$ i taj operator je ograničen hermitski operator u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{D}[JA],(\cdot,\cdot)_A)$. Posljednja tvrdnja slijedi iz relacija

$$(A^{-1}x,y)_A = [AA^{-1}x,y] = [A^{-1}Ax,y]$$

$$= [Ax,A^{-1}y] = (x,A^{-1}y)_A \qquad (\, x,y \in \mathcal{D}(A)\,)\,,$$

$$|(A^{-1}x,x)_A| = |[x,x]| \leq (x,x)$$

$$\leq \|A^{-1}\|\,[Ax,x] = \|A^{-1}\|\,(x,x)_A \qquad (\, x \in \mathcal{D}(A)\,)\,.$$

Slijedeća lema je jednostavna posljedica Krein-Reid-Laxovog teorema o simetrizabilnim operatorima (vidi [36], [57], [50]).

LEMA 2.2. Neka su S i K ograničeni operatori u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ takvi da su S i SK hermitski operatori. Tada vrijedi

$$|(SKx,x)| \leq \|K\|\,(|S|x,x) \qquad (\, x \in \mathcal{H}\,)\,.$$

DOKAZ. Operator $\operatorname{sgn}(S)K$ je ograničen u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $\|\operatorname{sgn}(S)K\| \leq \|K\|$. Operator $|S|$ je nenegativan i $|S|\operatorname{sgn}(S)K = SK$ je hermitski operator u $\mathcal{H}$. Dakle sve pretpostavke teorema 2.1 iz [57] su zadovoljene, pa slijedi

$$|(SKx,x)| = |(|S|\operatorname{sgn}(S)Kx,x)| \leq \|K\|\,(|S|x,x) \qquad (\, x \in \mathcal{H}\,)\,.$$

Lema je dokazana.

LEMA 2.3. Neka je A pozitivan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot\,,\cdot])$ i $0 \in \rho(A)$. Pretpostavimo da postoji pozitivan operator W u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ takav da $0 \in \rho(W)$.

$$\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}(W) \ , \ W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$$

i takav da je operator $W|_{\mathcal{D}[JA]}$ ograničen u $\mathcal{D}[JA]^{\sim}$. Tada je na $\mathcal{D}[JA]$ norma generisana pozitivno definitnim skalarnim produktom

$$\langle x,x\rangle_A := (|A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]}|x,y)_A \qquad (x,y \in \mathcal{D}[JA]) \tag{2.1}$$

ekvivalentna sa normom $\|\cdot\|$ na Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$. Operator W je ograničen u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$.

DOKAZ. Operator $A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]}$ je ograničen hermitski operator u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{D}[JA],(\cdot,\cdot)_A)$; $|A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]}|$ označava apsolutnu vrijednost ovog operatora u tom Hilbertovom prostoru. Za $x \in \mathcal{D}[JA]$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= (x,x) \leqslant \|W^{-1}\| \ [Wx,x] = \|W^{-1}\| \ (A^{-1}Wx,x)_A \\ &\leqslant \|W^{-1}\| \, \|W|_{\mathcal{D}[JA]}\| \ (|A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]}|x,x)_A \\ &= \|W^{-1}\| \, \|W|_{\mathcal{D}[JA]}\| \langle x,x\rangle_A \ .\end{aligned} \tag{2.2}$$

Posljednja nejednakost u (2.2) je posljedica leme 2.2 primijenjene na ograničene operatore $A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]}$ i $W|_{\mathcal{D}[JA]}$ u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{D}[JA],(\cdot,\cdot)_A)$. Ovdje je korištena činjenica da je operator $(A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]})(W|_{\mathcal{D}[JA]})$ pozitivan u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{D}[JA],(\cdot,\cdot)_A)$ (vidi prvi red u (2.2)). Dalje, za $x \in \mathcal{D}[JA]$ vrijedi

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle_A &= \sup\left\{ |\langle x,y\rangle_A|^2 : \langle y,y\rangle_A \leqslant 1\right\} \\ &= \sup\left\{ |(|A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]}|x,y)_A|^2 : \langle y,y\rangle_A \leqslant 1\right\} \\ &= \sup\left\{ |(A^{-1}x,y)_A|^2 : \langle y,y\rangle_A \leqslant 1\right\} \\ &= \sup\left\{ |[x,y]|^2 : \langle y,y\rangle_A \leqslant 1\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{ |[x,y]|^2 : \|y\|^2 \leqslant \|W^{-1}\| \, \|W|_{\mathcal{D}[JA]}\| \right\} \\ &= \|W^{-1}\| \, \|W|_{\mathcal{D}[JA]}\| \ \|x\|^2 \ .\end{aligned} \tag{2.3}$$

Prema (2.2) i (2.3) skalarni produkti $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ i $(\cdot,\cdot)$ generišu na $\mathcal{D}[JA]$ ekvivalentne norme. Operator JW je pozitivan u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$ i nejednakosti (2.2) i (2.3) povlače da je operator JW ograničen u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Ovdje se koristi činjenica da je skup $\mathcal{D}(A)$ gust u prostoru $\mathcal{K}$.

Operator W je takođe ograničen. Ovim je dokaz leme završen.

Primijetimo da je u [6] i [32], sa ciljem da se dokaže kompletnost na polovini ranga, ekvivalentnost nirmi iz leme 2.4 dokazana drugim metodama za slučaj Sturm-Liouville-ovog operatora sa indefinitnom težinskom funkcijom.

U daljem za fundamentalnu simetriju J stavljamo

$$P_{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm J)\ , \quad \mathcal{K}_{\pm} := P_{\pm}\mathcal{K}\ .$$

Za operator A u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ kažemo da je <u>fundamentalno reducibilan</u> ako postoji fundamentalna simetrija J takva da za svako $x \in \mathcal{D}(A)$ vrijedi P_+x , $P_-x \in \mathcal{D}(A)$ i $AP_{\pm}x \in \mathcal{K}_{\pm}$

Slijedeća karakterizacija fundamentalne reducibilnosti sadržana je u [19].

LEMA 2.4. Slijedeće izjave su ekvivalentne.

(i) Operator A je fundamentalno reducibilan.

(ii) Postoji fundamentalna simetrija J takva da je $AP_+ \supseteq P_+A$ i $AP_- \supseteq P_-A$.

(iii) Postoji fundamentalna simetrija J takva da vrijedi $AJ = JA$.

Za operator A u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ kažemo da je <u>sličan hermitskom operatoru</u> u $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ ako postoji pozitivan skalarni produkt $(\cdot,\cdot)'$ na $\mathcal{H}$ takav da skalarni produkti $(\cdot,\cdot)'$ i $(\cdot,\cdot)$ generišu na $\mathcal{H}$ ekvivalentne norme i operator A je hermitski u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot)')$. Slijedeći teorem je osnovni rezultat ovog odjeljka.

TEOREM 2.5. Neka je A pozitivan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ i $0 \in \rho(A)$. Slijedeće izjave su ekvivalentne.

(i) A je fundamentalno reducibilan.

(ii) U Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ postoji pozitivan operator W takav da je $0 \in \rho(W)$,

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(W)\ , \quad W\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)\ , \tag{2.4}$$

i $W|_{\mathcal{D}(A)}$ je ograničen operator u $\mathcal{D}(A)^{\wedge}$.

(iii) U Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ postoji pozitivan ograničen operator W takav da $0 \in \rho(W)$ i vrijedi (2.4).

(iv) U Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ postoji pozitivan operator W takav da je $0 \in \rho(W)$,

$$\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}(W)\ , \quad W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]\ ,$$

i $W|_{\mathcal{D}[JA]}$ je ograničen operator u $\mathcal{D}[JA]^{\sim}$.

(v) Pozitivno definitni skalarni produkti $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ i $(\cdot,\cdot)$ generišu ekvivalentne norme na $\mathcal{D}[JA]$.

(vi) A je sličan hermitskom operatoru u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$.

(vii) Tačka beskonačno nije singularna kritična tačka operatora A.

DOKAZ. (i) $\Rightarrow$ (ii): Neka je operator A fundamentalno reducibilan. Tada, prema lemi 2.4 postoji fundamentalna simetrija J_o koja komutira sa A, $AJ_o = J_oA$. Očigledno $J_o\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ i operator J_o je ograničen s obzirom na normu $\|\cdot\|_{AJ_oA}$. Prema propoziciji 1.1 norma $\|\cdot\|_{AJ_oA}$ generiše na $\mathcal{D}(A)$ topologiju skupa $\mathcal{D}(A)^\wedge$. Dakle, $J_o|_{\mathcal{D}(A)}$ je ograničen operator u $\mathcal{D}(A)^\wedge$, pa možemo uzeti $W = J_o$ u izjavi (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Da bi dokazali ovu implikaciju, primijenimo lemu 2.3 na operator AJA i operator W iz izjave (ii). Operator AJA je pozitivan operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ i $0 \in \rho(AJA)$ i prema primjedbi 1.4 vrijedi $\mathcal{D}[(JA)^2] = \mathcal{D}[J(AJA)] = \mathcal{D}(A)$. Dakle sve pretpostavke leme 2.3 su ispunjene i prema ovoj lemi operator W je ograničen u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Operator WA^{-1} je ograničen u $\mathcal{K}$. Budući da je $W\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$, operator AWA^{-1} je definisan na cijelom $\mathcal{K}$ i zatvoren, te zbog toga i ograničen u $\mathcal{K}$. Operator $WAWA^{-1}$ je takođe ograničen u $\mathcal{K}$, odnosno

$$\|WAWA^{-1}x\| \leqslant c_1\|x\| \qquad (x \in \mathcal{K})$$

za neko $c_1 > 0$. Ova nejednakost je ekvivalentna sa

$$\|WAWx\| \leqslant c_1\|Ax\| \qquad (x \in \mathcal{D}(A)),$$

i takođe sa

$$\|JWAWx\| \leqslant c_1\|JAx\| \qquad (x \in \mathcal{D}(A)).$$

Operator c_1JA je pozitivan hermitski operator u $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Operator $JWAW$ je pozitivan u $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$ i $0 \in \rho(JWAW)$ pa je ovaj operator i hermitski u $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Dalje je $\mathcal{D}(JWAW) \supseteq \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(c_1JA)$. Prema teoremu 1.2 slijedi da je

$$(JWAWx,x) \leqslant c_1(JAx,x) \qquad (x \in \mathcal{D}(A)),$$

ili, što je isto,

$$[AWx,Wx] \leqslant c_1[Ax,x] \qquad (x \in \mathcal{D}(A)).$$

Ovim je dokazano da je operator $W|_{\mathcal{D}(A)}$ ograničen s obzirom na normu $\|\cdot\|_A$ na $\mathcal{D}(A)$. Ostaje da se pokaže da vrijedi $W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$. Neka je (x_n) niz elemenata skupa $\mathcal{D}(A)$ i $x_n \longrightarrow$ po normi $\|\cdot\|_A$. Tada $x \in \mathcal{D}[JA]$, $x_n \longrightarrow x$ po normi $\|\cdot\|$ i, pošto je operator W ograničen, $Wx_n \longrightarrow Wx$ po normi $\|\cdot\|$. Budući da je operator $W|_{\mathcal{D}(A)}$ ograničen s obzirom na normu $\|\cdot\|_A$ na $\mathcal{D}(A)$, niz (Wx_n) je Cauchyjev niz s obzirom na normu $\|\cdot\|_A$ i zbog toga je i konvergentan u Banachovom prostoru $(\mathcal{D}[JA], \|\cdot\|_A)$, tj. $Wx_n \longrightarrow y_o$ po normi $\|\cdot\|_A$ za neko $y_o \in \mathcal{D}[JA]$. Odavde slijedi da $Wx_n \longrightarrow y_o$ po normi $\|\cdot\|$. Zbog toga je $y_o = Wx \in \mathcal{D}[JA]$. Ovim je dokazano $W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Ova implikacija je posljedica leme 2.3.

(v) $\Rightarrow$ (vi): Pretpostavimo da skalarni produkti $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ i $(\cdot,\cdot)$ generišu ekvivalentne norme na $\mathcal{D}[JA]$. Pošto je skup $\mathcal{D}[JA]$ gust u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$, skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ može se neprekidno proširiti na cijeli prostor $\mathcal{K}$.
U primjedbi 2.1 pokazano je da je $A^{-1}|_{\mathcal{D}[JA]}$ hermitski operator u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{D}[JA],(\cdot,\cdot)_A)$. Na sličan način dokazuje se da je A^{-1} hermitski operator u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},\langle\cdot,\cdot\rangle_A)$. Skalarni produkti $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ i $(\cdot,\cdot)$ generišu ekvivalentne norme na $\mathcal{K}$, pa je operator A^{-1} sličan hermitskom operatoru u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Zbog toga je i operator A sličan hermitskom operatoru u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$.

Implikacija (vi) $\Rightarrow$ (vii) je očigledna. Ekvivalencija (i) $\Leftrightarrow$ (vii) je dobro poznata (vidi [4]). Teorem je dokazan.

U [32] dat je primjer operatora A za koga norme koje se pojavljuju u izjavi (v) nisu ekvivalentne. Prema teoremu 2.5 ovo znači $\infty \in c_s(A)$. Primjeri pozitivnog operatora u Kreinovom prostoru za koje je $\infty \in c_s(A)$ dati su ranije u [42], [21] i [4]

KOROLAR 2.6. Neka su A i D pozitivni operatori u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ takvi da je $0 \in \rho(A)$, $0 \in \rho(D)$ i $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(D)$. Tada $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(D)$.

DOKAZ. Ova tvrdnja je posljedica ekvivalencije (iii) $\Leftrightarrow$ (vi) u teoremu 2.5 i pretpostavke $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(D)$.

KOROLAR 2.7. Neka je operator A kao u teoremu 2.5. Operator A je fundamentalno reducibilan ako i samo ako postoji

DOKAZ. Operator $J = 2P_+ - I$ je pozitivan ograničen operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$, $0 \in \rho(J)$ i iz $P_+\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ slijedi $J\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$. Sada implikacija (iii) $\Rightarrow$ (i) iz teorema 2.5 povlači da je uslov $P_+\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ dovoljan za fundamentalnu reducibilnost operatora A. Obrnuta tvrdnja je očigledna.

2.2. LEMA 2.8. Neka je A pozitivan operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$, $0 \in \rho(A)$ i neka je m proizvoljan cio broj. Stavimo $B = JA$. Tada $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(JB^{2^m})$.

DOKAZ. Pretpostavimo prvo da je $m = 1$. Operator $JB^2 = AJA$ je pozitivan u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ i $0 \in \rho(AJA)$. U primjedbi 1.4 napomenuli smo da vrijedi $\mathcal{D}(A)^\wedge = \mathcal{D}[J(AJA)]^\sim$. Zbog toga operator W iz izjave (ii) teorema 2.5 primijenjenog na operator A ima iste osobine kao i operator W iz izjave (iv) teorema 2.5 primijenjenog na operator AJA. Odavde slijedi da $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(JB^2)$. Možemo pretpostaviti da je $m \neq 0$. Sada dokaz leme dobijamo ako upravo dokazanu činjenicu primijenimo m puta. U slučaju $m > 0$ polazimo od operatora A, a u slučaju $m < 0$ polazimo od operatora JB^{2^m}.

TEOREM 2.9. Neka je A pozitivan operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$, $0 \in \rho(A)$ i $\mu \in (0,+\infty)$. Stavimo $B = JA$. Tada $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(JB^\mu)$.

DOKAZ. Pretpostavimo da $\infty \notin c_s(A)$. Implikacija (vii) $\Rightarrow$ (i) iz teorema 2.5 povlači da postoji pozitivan operator W u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$, takav da je $0 \in \rho(W)$,

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(W), \quad W\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

i $W|_{\mathcal{D}(A)}$ je ograničen operator s obzirom na normu $\|(B^2 + I)^{1/2}\cdot\|$ na $\mathcal{D}(A)$. Odavde slijedi da je operator $W|_{\mathcal{D}(A)}$ ograničen s obzirom na normu $\|B\cdot\|$ na $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. U dokazu implikacije (ii) $\Rightarrow$ (iii) teorema 2.5 pokazano je da je W ograničen operator u $\mathcal{K}$. Prema teoremu 1.2 dobijamo da vrijedi

$$W\mathcal{D}(B^\alpha) \subseteq \mathcal{D}(B^\alpha) \qquad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Dakle u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ postoji pozitivan ograničen operator W takav da $0 \in \rho(W)$ i $W\mathcal{D}(JB^\alpha) \subseteq \mathcal{D}(JB^\alpha)$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Pošto operator JB^μ $(\mu \in (0,+\infty))$ zadovoljava uslove teorema 2.5

implikacija (iii) $\Rightarrow$ (vii) istog teorema daje $\infty \notin c_s(JB^{\alpha})$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Dakle dokazali smo "samo ako" dio teorema za $\mu \in (0,1]$. Za $\mu > 1$ postoji pozitivan cio broj m takav da je $\mu/2^m < 1$. Lema 2.8 povlači da $\infty \notin c_s(JB^{2^m})$. Pošto je $\mu/2^m < 1$ možemo primijeniti već dokazani dio teorema 2.9 na operator JB^{2^m}, pa dobijamo da $\infty \notin c_s(JB^{\mu})$ $(\mu \in (1,+\infty))$. Time je "samo ako" dio teorema dokazan. Da bi dokazali i obrnuto primijenimo već dokazani dio teorema na operator JB^{μ} $(\mu \in (0,+\infty))$ i broj $1/\mu \in (0,+\infty)$. Tako dobijamo da $\infty \notin c_s(JB^{\mu})$ povlači da $\infty \notin c_s(JB)$. Teorem je dokazan.

I.3. Definitibilni operatori

3.1. U ovom odjeljku dokazaćemo da su izjave (ii), (iii), (iv) i (vii) teorema 2.5 ekvivalentne i za definitibilan operator A u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$. Daćemo i neke primjene ovog rezultata.

LEMA 3.1. Neka je A definitibilan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Tada $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(J(|JA| + I))$.

DOKAZ. Označimo spektralnu funkciju operatora A sa E. Neka je $\Delta_\infty \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $\mathbb{R}\setminus\Delta_\infty$ kompaktan interval koji sadrži u svojoj unutrašnjosti sve konačne kritične tačke operatora A i nulu. Stavimo $\mathcal{K}_\infty := E(\Delta_\infty)\mathcal{K}$. Pretpostavimo da $\infty \in c_s(A)$. Operator $A|_{\mathcal{K}_\infty}$ ima ograničen inverzni operator i on je pozitivan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K}_\infty,[\cdot,\cdot])$. Neka je J_o fundamentalna simetrija prostora $\mathcal{K}$ koja komutira sa $E(\Delta_\infty)$. Stavimo $(x,y)_o := [J_o x,y]$ $(x,y \in \mathcal{K})$ i $B_o = J_o A$. Tada je $J_o|_{\mathcal{K}_\infty}$ fundamentalna simetrija Kreinovog prostora $\mathcal{K}_\infty$ i operator B_o komutira sa $E(\Delta_\infty)$. Operator $B_o|_{\mathcal{K}_\infty}$ je pozitivan i ima ograničen inverzni operator u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K}_\infty,(\cdot,\cdot)_o$. Vrijedi $B_o|_{\mathcal{K}_\infty} = |B_o||_{\mathcal{K}_\infty}$. Slijedeće izjave su ekvivalentne:

(a) $\infty \in c_s(A)$, (b) $\infty \in c_s(A|_{\mathcal{K}_\infty})$, (c) $\infty \in c_s(J_o B_o|_{\mathcal{K}_\infty})$

(d) $\infty \in c_s(J_o|B_o||_{\mathcal{K}_\infty})$, (e) $\infty \in c_s(J_o(|B_o| + I)|_{\mathcal{K}_\infty})$,

(f) $\infty \in c_s(J(|B_o| + I))$, (g) $\infty \in c_s(J(|B| + I))$.

Ekvivalencije (d)$\Leftrightarrow$(e) i (f)$\Leftrightarrow$(g) su posljedice korolara 2.6, ostale ekvivalencije su očigledne. Ovim je lema dokazana.

Slijedeći teorem je posljedica leme 3.1, primjedbe 1.4 i teorema 2.5.

TEOREM 3.2. Neka je A definitibilan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Slijedeće izjave su ekvivalentne

(i) Tačka beskonačno nije singularna kritična tačka operatora A.

(ii) U Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ postoji pozitivan operator W takav da $0 \in \rho(W)$,

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(W), \quad W\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A), \tag{3.1}$$

i $W|_{\mathcal{D}(A)}$ je ograničen operator u $\mathcal{D}(A)^{\wedge}$.

(iii) U Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ postoji pozitivan ograničen operator W takav da $0 \in \rho(W)$ i vrijedi (3.1).

(iv) U Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ postoji pozitivan operator W takav da $0 \in \rho(W)$,

$$\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}(W), \quad W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA],$$

i $W|_{\mathcal{D}[JA]}$ je neprekidan operator u $\mathcal{D}[JA]^{\sim}$.

KOROLAR 3.3. Neka su A i D definitibilni operatori u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ i pretpostavimo da je $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(D)$. Tada $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(D)$.

DOKAZ. Ova tvrdnja je posljedica ekvivalencije (iii) $\Leftrightarrow$ (i) u teoremu 3.2 i pretpostavke $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(D)$.

PRIMJEDBA 3.4. Neposredne posljedice prethodnog korolara su slijedeće tvrdnje. Neka su A i D operatori u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ takvi da $\mathcal{D}(D) \supseteq \mathcal{D}(A)$ ($\mathcal{D}(D) \supseteq \mathcal{R}(A)$, respekvivno) i takvi da su operatori A i $A + D$ (DA, respektivno) definitibilni. Tada $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(A + D)$ ($\infty \notin c_s(DA)$, respektivno).

PROPOZICIJA 3.5. Neka je A definitibilan operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$. Slijedeće izjave su ekvivalentne.

(i) Tačka beskonačno nije singularna kritična tačka operatora A.

(ii) U Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ postoji pozitivan ograničen operator W takav da $0 \in \rho(W)$ i

$$W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA].$$

DOKAZ. Na osnovu primjedbe 1.4 slijedi $\mathcal{D}[JA] = \mathcal{D}(J(|JA| + I)^{1/2})$. Prema tome izjava (ii) ove propozicije je identična sa izjavom (ii) teorema 2.5 primijenjenog na pozitivan operator $J(|JA| + I)^{1/2}$, Prema ekvivalenciji (iii)$\Leftrightarrow$(vii) u teoremu 2.5, da bi dokazali ovu propoziciju, dovoljno je dokazati da $\infty \notin c_s(J(|JA| + I)^{1/2})$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(A)$. Posljednja ekvivalencija slijedi iz leme 2.8 koja daje $\infty \notin c_s(J(|JA| + I)^{1/2})$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(J(|JA| + I))$ i leme 3.1 koja tvrdi $\infty \notin c_s(J(|JA| + I))$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(A)$. Propozicija je dokazana.

KOROLAR 3.6. Neka su A i D definitibilni operatori u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$. Pretpostavimo $\mathcal{D}[JA] = \mathcal{D}[JD]$. Tada $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(D)$.

DOKAZ. Ova tvrdnja je posljedica ekvivalencije u propoziciji 3.5 i pretpostavke $\mathcal{D}[JA] = \mathcal{D}[JD]$.

PRIMJEDBA 3.7. Neka je A definitibilan operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$. Opisaćemo situaciju u kojoj je pretpostavka (ii) propozicije 3.5 ispunjena. Pretpostavimo da postoje fundamentalna simetrija J i operatori $X_\pm$, $Y_\pm$ definisani na $\mathcal{K}$ sa slijedećim osobinama:

(a) $X_\pm \mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$, $Y_\pm \mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$,

(b) $X_\pm$ i $Y_\pm$ su ograničeni operatori u $\mathcal{K}$,

(c) $X_\pm\big|_{\mathcal{K}_\pm} = I_\pm$, $X_\pm(\mathcal{K}_\mp) \subseteq \mathcal{K}_\mp$,

(d) $X_\pm = \pm Y_\pm^* J$.

Ovdje I ($I_\pm$, respektivno) označava jedinični operator na $\mathcal{K}$($\mathcal{K}_\pm$, respektivno). Tada operator $W = Y_+X_+ - Y_-X_-$ ima sve osobine operatora W u izjavi (ii) propozicije 3.5. Da bi ovo dokazali treba dokazati samo da je operator W pozitivan u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ i $0 \in \rho(W)$. Ovo slijedi iz slijedećeg niza nejednakosti:

$$\begin{aligned}(x,x) &= (x_+,x_+) + (x_-,x_-) = (X_+x_+,X_+x_+) + (X_-x_-,X_-x_-)\\ &\leqslant (X_+x,Y_+^*Jx) - (X_-x,Y_-^*Jx)\\ &= (JY_+X_+x,x) - (JY_-X_-x,x) = (J(Y_+X_+ - Y_-X_-)x,x)\\ &= (JWx,x) = [Wx,x] \qquad (x \in \mathcal{K},\ x_\pm = P_\pm x).\end{aligned}$$

Operatori $X_\pm$, $Y_\pm$ sa gornjim osobinama konstruisani su u [6] za jednu klasu Sturm-Liouville-ovih operatora sa indefinitnom težinskom funkcijom. Ideja ove primjedbe koristi se u glavi III, odjeljak 3 da se dokaže regularnost kritične tačke beskonačno za jednu klasu definitibilnih diferencijalnih operatora sa indefinitnom težinskom funkcijom (vidjeti takođe [10]) .

PRIMJEDBA 3.8. Neka je u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$ dat simetričan operator S koji je ograničen odozdo sa donjim ograničenjem γ . Tada jednakost

$$\|x\|_S^2 := (1-\gamma)\ \|x\|^2 + (Sx,x) \qquad (x \in \mathcal{D}(S))$$

definiše normu na $\mathcal{D}(S)$ (vidi [60, s.122]). Označimo sa S_F Friedrichsovo proširenje operatora S i pretpostavimo da je operator JS_F definitibilan u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Pretpostavimo da u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ postoji pozitivan operator W takav da $0 \in \rho(W)$,

$$\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(W)\ , \quad W\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(S)$$

i takav da je $W|_{\mathcal{D}(S)}$ ograničen operator s obzirom na normu $\|\cdot\|_S$. Tada $\infty \notin c_s(JS_F)$.

Stvarno, kompletizacija skupa $\mathcal{D}(S)$ s obzirom na normu $\|\cdot\|_S$ je očigledno sadržana u $\mathcal{D}(W)$ i ta kompletizacija je invarijantna u odnosu na W . Ova kompletizacija podudara se sa skupom $\mathcal{D}[S_F]$ (viditi [37, dio I, teorem 10]) . Norma $\|\cdot\|_S$ može se proširiti na skup $\mathcal{D}[S_F]$, i za ovako proširenu normu $\|\cdot\|_S$ imamo

$$\|x\|_S = \|(S_F + (1-\gamma)I)^{1/2}x\| \qquad (x \in \mathcal{D}[S_F]) , \tag{3.2}$$

i $W|_{\mathcal{D}[S_F]}$ je ograničen operator s obzirom na ovu normu. Propozicija 1.1 povlači da norma (3.2) generiše topologiju skupa $\mathcal{D}[S_F]^{\sim}$. Prema teoremu 3.2 slijedi da $\infty \notin c_s(JS_F)$.

Označimo sa S_K Kreinovo proširenje operatora S (to je meko proširenje u terminologiji iz [37]) . Pretpostavimo da je operator JS_K definitibilan u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ i da je $\gamma > 0$. Ako je operator W , pored ranije navedenih osobina, još i ograničen i vrijedi

$$W\mathcal{R}(JS) \subseteq \mathcal{R}(JS)\ ,$$

tada $\infty \notin c_s(JS_K)$.

Da bi dokazali ovu činjenicu primijetimo da prema teoremu 14 iz [37, dio I] imamo

$$\mathcal{D}[S_K] = \mathcal{D}[S_F] + \mathcal{N}_0 ,$$

gdje je $\mathcal{N}_0$ nulpotprostor operatora S^*. Skup $\mathcal{N}_0$ je invarijantan u odnosu na W. Stvarno, za svako $x \in \mathcal{D}(S)$ postoji $x' \in \mathcal{D}(S)$ tako da je $WJSx = JSx'$. Zbog toga za $\varphi \in \mathcal{N}_0$ imamo

$$\begin{aligned}(S^* W\varphi, x) &= (W\varphi, Sx) = [W\varphi, JSx] = [\varphi, WJSx] \\ &= [\varphi, JSx'] = (\varphi, Sx') = (S^*\varphi, x') = 0 .\end{aligned}$$

Pošto je $x \in \mathcal{D}(S)$ bilo proizvoljno i $\mathcal{D}(S)$ je gust skup u $\mathcal{K}$ zaključujemo da $W\varphi \in \mathcal{N}_0$. Ranije smo dokazali da je skup $\mathcal{D}[S_F]$ invarijantan u odnosu na W. Slijedi da je i skup $\mathcal{D}[S_K]$ invarijantan u odnosu na pozitivan, ograničen operator W, $0 \in \rho(W)$, pa na osnovu propozicije 3.5 slijedi $\infty \notin c_s(JS_K)$.

3.2. Slijedeći teorem je poopštenje teorema 2.9.

TEOREM 3.9. Neka je A nenegativan hermitski operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ takav da je $\rho(A) \neq \emptyset$. Stavimo $B = JA$. Ako je $\mu \in (0,+\infty)$ takav da $\rho(JB^{\mu}) \neq \emptyset$ onda $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(JB^{\mu})$.

DOKAZ. Pretpostavimo da je $\rho(JB^{\mu}) \neq \emptyset$ za neki $\mu \in (0,+\infty)$. U ovom slučaju operator JB^{μ} je definitibilan. Prema jednakosti (1.4) imamo $\mathcal{D}((I+B)^{\mu}) = \mathcal{D}(B^{\mu})$ i, na osnovu korolara 3.3, $\infty \notin c_s(J(B+I)^{\mu})$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(JB^{\mu})$. Teorem 2.9 povlači da $\infty \notin c_s(J(B+I)^{\mu})$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(J(B+I))$. Pošto je operator A definitibilan, prema lemi 3.1 imamo da $\infty \notin c_s(J(B+I))$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(A)$. Ove ekvivalencije dokazuju teorem.

Prema lemi 1.8 uslov $\rho(JB^{\mu}) \neq \emptyset$ u teoremu 3.9 je ispunjen za $\mu = 2^m$, m pozitivan cio broj.

PROPOZICIJA 3.10. Neka je A definitibilan operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$. Stavimo $B = JA$. Pretpostavimo da je za neko $m \in \{n, 1/(2n+1) : n = 1,2,\ldots\}$ operator JB^m definitibilan. Tada $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(JB^m)$.

DOKAZ. Na osnovu leme 3.1 imamo $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(J(|B|+I))$. Teorem 2.9 povlači da $\infty \notin c_s(J(|B|+I)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(J(|B|+I)^m)$. Vrijedi

$$\mathcal{D}((|B|+I)^m) = \mathcal{D}(|B|^m) = \mathcal{D}(|B^m|) = \mathcal{D}(B^m) = \mathcal{D}(JB^m) .$$

Prva od ovih jednakosti je posljedica jednakosti (1.4). Po pretpostavci propozicije operator JB^m je definitibilan, pa korolar 3.3 povlači $\infty \notin c_s(J(|B| + I)^m)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(JB^m)$. Ovaj niz ekvivalencija dokazuje propoziciju.

PROPOZICIJA 3.11. Neka je A pozitivan, hermitski operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ takav da je $\rho(A) \neq \emptyset$ i $0 \notin \sigma_p(A)$. Stavimo $B = JA$. Pretpostavimo da je $\rho(JB^\mu) \neq \emptyset$ za neko $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tada je operator A fundamentalno reducidilan ako i samo ako je operator JB^μ fundamentalno reducibilan.

DOKAZ. Operatori A, A^{-1}, JB^μ i $JB^{-\mu}$ su pozitivni hermitski operatori u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ i ovi operatori imaju neprazne rezolventne skupove. Zbog toga samo 0 i ∞ mogu biti kritične tačke ovih operatora. Za $\mu > 0$, prema teoremu 3.9 imamo da $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(JB^\mu)$. Dalje, $0 \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(A^{-1})$. Zbog $A^{-1} = J(JB^{-1}J)$ i $(JB^{-1}J)^\mu = JB^{-\mu}J$, prema teoremu 3.9 imamo da $\infty \notin c_s(A^{-1})$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(B^{-\mu}J)$. Pošto je $(B^{-\mu}J)^{-1} = JB^\mu$ zaključujemo da $0 \notin c_s(A)$ ako i samo ako $0 \notin c_s(JB^\mu)$. Dakle, za $\mu > 0$ dokazali smo da $c_s(A) = \emptyset$ ako i samo ako $c_s(JB^\mu) = \emptyset$. Za $\mu < 0$ posljednja ekvivalencija slijedi iz ekvivalencije: $c_s(A) = \emptyset \Leftrightarrow c_s(A^{-1}) = \emptyset$. Za pozitivan hermitski operator D u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ za koji je $\rho(D) \neq \emptyset$, fundamentalna reducibilnost je ekvivalentna sa $c_s(D) = \emptyset$ (viditi [24]). Propozicija je dokazana.

I.4. Aditivne perturbacije

U ovom odjeljku pokazaćemo da se regularnost kritične tačke ∞ očuvava pri izvjesnim "aditivnim" perturbacijama. Ovo pitanje razmatrano je u [59], [24], [25]. Ovdje mi pretpostavljamo da perturbirani operator ima definitibilno proširenje i to nam omogućava da oslabimo uslove na perturbirajući operator.

Neka je A zatvoren operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$. Podprostor $\mathcal{L}$ domena $\mathcal{D}(A)$ nazivamo jezgro operatora A ako je $\mathcal{L}$ gust skup u $\mathcal{D}(A)$ u odnosu na normu grafa na $\mathcal{D}(A)$.

TEOREM 4.1. Neka je A definitibilan operator i neka je D simetričan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$. Pretpostavimo da su zadovoljeni slijedeći uslovi:

(1) $\mathcal{D}(D) \subseteq \mathcal{D}(A)$ i $\mathcal{D}(D)$ je jezgro operatora $|JA|^{1/2}$;

(2) $[Ax,x] \geqslant \gamma \|x\|^2$ ($x \in \mathcal{D}(A)$) za neko $\gamma \in \mathbb{R}$

(tj. operator JA je ograničen odozdo)

(3) Postoje $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geqslant 0$, $\beta_1 < 1$ takvi da

$$- \alpha_1 \|x\|^2 - \beta_1(|JA|x,x) \leqslant [Dx,x]$$
$$\leqslant \alpha_2 \|x\|^2 + \beta_2(|JA|x,x) \qquad (x \in \mathcal{D}(D)) . \tag{4.1}$$

Tada je operator $J(A + D)$ ograničen odozdo. Ako Friedrichsovo proširenje S ovog operatora ima osobinu da je operator $T = JS$ definitibilan, onda $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(T)$.

DOKAZ. Lako se vidi da za $\alpha \leqslant \gamma$, $\alpha \leqslant 0$ vrijedi nejednakost

$$(|JA|x,x) \leqslant (JAx,x) - 2\alpha \|x\|^2 \qquad (x \in \mathcal{D}(A)) . \tag{4.2}$$

Lijeva nejednakost u (4.1) i nejednakost (4.2) povlače da za $x \in \mathcal{D}(D)$ i $\alpha \leqslant \gamma$, $\alpha \leqslant 0$ imamo

$$(J(A + D)x,x) \geqslant (JAx,x) - \beta_1(|JA|x,x) - \alpha_1 \|x\|^2$$
$$\geqslant (JAx,x) - \beta_1(JAx,x) + 2\beta_1\alpha \|x\|^2 - \alpha_1 \|x\|^2$$
$$\geqslant ((1 - \beta_1)\gamma + 2\beta_1\alpha - \alpha_1) \|x\|^2 . \tag{4.3}$$

Dakle operator $J(A + D)$ je ograničen odozdo u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot))$. Označimo donje ograničenje ovog operatora sa δ . Oduzimajući $\beta\|x\|^2$, $\beta < \delta$ od prvog i od trećeg člana u nejednakosti (4.3), za $x \in \mathcal{D}(D)$, dobijamo

$$(J(A + D)x,x) - \beta \|x\|^2$$
$$\geqslant (1 - \beta_1) (JAx,x) + (2\beta_1\alpha - \alpha_1 - \beta) \|x\|^2 . \tag{4.4}$$

Dalje, nejednakosti (4.4) i (4.2) , zbog $1 - \beta_1 > 0$, za $\beta < 2\alpha - \alpha_1$ i $x \in \mathcal{D}(D)$, daju

$$(J(A + D)x,x) - \beta \|x\|^2$$
$$\geqslant (1 - \beta_1) (|JA|x,x) + (2\alpha - \alpha_1 - \beta) \|x\|^2$$
$$= (1 - \beta_1) \left\| \left(|JA| + \frac{2\alpha - \alpha_1 - \beta}{1 - \beta_1} I\right)^{1/2} x \right\|^2 . \tag{4.5}$$

Lijeva nejednakost u (4.1), za $\beta' < \delta$, $\beta' < \alpha_2$, $x \in \mathcal{D}(D)$ povlači

$$0 \leqslant (J(A + D)x,x) - \beta' \|x\|^2$$
$$\leqslant (JAx,x) + \beta_2(|JA|x,x) + \alpha_2 \|x\|^2 - \beta'\|x\|^2$$

$$\leqslant (1 + \beta_2)\,(|JA|x,x) + (\alpha_2 - \beta')\,\|x\|^2$$

$$= (1 + \beta_2)\,\left\|\left(|JA| + \frac{\alpha_2 - \beta'}{1 + \beta_2} I\right)^{1/2} x\right\|^2 . \qquad (4.6)$$

Norme sa desne strane u nejednakostima (4.5) i (4.6) su ekvivalentne sa normom $\|(|JA| + I)^{1/2}\cdot\|$ na $\mathcal{D}[JA]$. Pošto vrijedi $\mathcal{D}[JA] = \mathcal{D}(|JA|^{1/2})$ pretpostavka da je $\mathcal{D}(D)$ jezgro operatora $|JA|^{1/2}$ povlači da je skup $\mathcal{D}(D)$ gust u skupu $\mathcal{D}(|JA|^{1/2})$ s obzirom na normu grafa. Prema propoziciji 1.1 slijedi da je skup $\mathcal{D}(D)$ gust u $\mathcal{D}[JA]^{\sim}$. Sada nejednakosti (4.5) i (4.6) povlače da je $\mathcal{D}[JA]$ domen zatvorenja seskvilinearne forme $[(A + D)\cdot,\cdot]$ koja je definisana na $\mathcal{D}(D)$ (vidjeti [60, s.122]).

Friedrichsovo proširenje S operatora $J(A + D)$ je ograničeno odozdo i domeni zatvorenja seskvilinearnih formi $(J(A + D)\cdot,\cdot)$ i $(JS\cdot,\cdot)$ se podudaraju. Na osnovu prethodnih razmatranja i primjedbe 1.5 slijedi $\mathcal{D}[JA] = \mathcal{D}[JT]$. Pošto je operator T definitibilan, prema korolaru 3.6 imamo da $\infty \notin c_s(A)$ ako i samo ako $\infty \notin c_s(T)$. Teorem je dokazan.

I.5. Karakterizacija skupa $\mathcal{D}[JA]$ za definitibilan operator A

Neka je A definitibilan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ sa spektralnom funkcijom E. Neka je $B = JA$ i F spektralna funkcija operatora B. Tada je $\mathcal{D}[B] = \mathcal{D}[JA]$ i kao što smo vidjeli u odjeljku 1 imamo $\mathcal{D}[B] = \mathcal{D}(|B|^{1/2})$. Odavde slijedi da za $f \in \mathcal{K}$ vrijedi $f \in \mathcal{D}[JA]$ ako i samo ako $\int_{\mathbb{R}} |\lambda|\, d(F_\lambda f,f) < +\infty$. U ovom odjeljku pokazaćemo da se analogna karakterizacija skupa $\mathcal{D}[JA]$ može dati pomoću spektralne funkcije E operatora A. Stavimo

$$\mathcal{L}_\infty := \left\{ f \in \mathcal{K} : \text{za neku okolinu } \Delta_\infty \text{ tačke } \infty \text{ vrijedi } \left|\int_{\Delta_\infty} \lambda\, d[E_\lambda f,f]\right| < +\infty \right\} .$$

PROPOZICIJA 5.1. Neka je A pozitivan operator u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$ i $0 \in \rho(A)$. Tada vrijedi

$$\mathcal{D}[JA] = \mathcal{L}_\infty .$$

DOKAZ. Prvo ćemo dokazati da je $\int \lambda d[E_\lambda f,f] < +\infty$ za svE

$f \in \mathcal{D}[JA]$. Slijedeća karakterizacija skupa $\mathcal{D}[JA]$ slijedi iz primjedbe 1.5 : $f \in \mathcal{D}[JA]$ ako i samo ako postoji niz $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ takav da

a) $\|\varphi_n - f\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$

b) $[A(\varphi_n - \varphi_m), \varphi_n - \varphi_m] \longrightarrow 0 \quad (n,m \longrightarrow +\infty)$.

Za $\nu > 0$ stavimo $\Delta_\nu = (-\nu, \nu)$. Tada imamo

$$[A(\varphi_n - \varphi_m), \varphi_n - \varphi_m] \geqslant [AE(\Delta_\nu)(\varphi_n - \varphi_m), \varphi_n - \varphi_m]$$
$$(n,m = 1,2,\ldots, \nu > 0) .$$

Iz posljednje nejednakosti i relacije b) slijedi da za $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N(\varepsilon)$ takav da

$$[AE(\Delta_\nu)(\varphi_n - \varphi_m), \varphi_n - \varphi_m] < \varepsilon \qquad (n,m \geqslant N(\varepsilon), \nu > 0) .$$

Pošto je operator $AE(\Delta_\nu)$, $\nu > 0$, ograničen, ako $m \longrightarrow +\infty$, prema relaciji a), dobijamo

$$[AE(\Delta_\nu)(\varphi_n - f), \varphi_n - f] \leqslant \varepsilon \qquad (n \geqslant N(\varepsilon), \nu > 0) .$$

Stavljajući $E(\Delta_\nu)f = f^{\langle\nu\rangle}$, $\nu > 0$, dobijamo

$$[AE(\Delta_\nu)(\varphi_n - f^{\langle\nu\rangle}), \varphi_n - f^{\langle\nu\rangle}] \leqslant \varepsilon \qquad (n \geqslant N(\varepsilon), \nu > 0) \quad (5.$$

Očigledno je da vrijedi $\mathcal{R}(A) = \mathcal{K}$ i nulpotprostor operatora A je trivijalan. Zbog toga prema teoremu 6.1(ii) iz [47] imamo da je $g = \int_{\mathbb{R}} dE_\lambda g$ za sve $g \in \mathcal{D}(A)$. Prema tome $\lim_{\nu \to +\infty} E(\Delta_\nu^c)g = 0$ za sve $g \in \mathcal{D}(A)$, ovdje je $\Delta^c = \mathbb{R} \setminus \Delta$. Dakle

$$[Ag, E(\Delta_\nu^c)g] \longrightarrow 0 \qquad (\nu \longrightarrow +\infty, g \in \mathcal{D}(A)) .$$

Pošto je $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$, za fiksiran prirodan broj n_o, $n_o \geqslant N(\varepsilon)$ postoji realan broj $\nu_o = \nu_o(n_o, \varepsilon) = \nu_o(\varepsilon)$ takav da

$$[A\varphi_{n_o}, E(\Delta_\nu^c)\varphi_{n_o}] < \varepsilon \qquad (\nu \geqslant \nu_o(\varepsilon)) .$$

S obzirom na (5.1) odavde slijedi

$$[A(\varphi_{n_o} - f^{\langle\nu\rangle}), \varphi_{n_o} - f^{\langle\nu\rangle}] = [AE(\Delta_\nu^c)(\varphi_{n_o} - f^{\langle\nu\rangle}), \varphi_{n_o} - f^{\langle\nu\rangle}] +$$

$$+ [AE(\Delta_\nu)(\varphi_{n_o} - f^{\langle\nu\rangle}), \varphi_{n_o} - f^{\langle\nu\rangle}] =$$

$$= [AE(\Delta_\nu^c)\varphi_{n_o}, \varphi_{n_o}] + [AE(\Delta_\nu)(\varphi_{n_o} - f), \varphi_{n_o} - f] \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (\nu \geqslant \nu_o(\varepsilon)) .$$

Iz posljednje nejednakosti slijedi

$$[A(f^{\langle\nu\rangle} - f^{\langle\mu\rangle}), f^{\langle\nu\rangle} - f^{\langle\mu\rangle}] \leq 8\varepsilon \qquad (\nu,\mu \geq \nu_0(\varepsilon)) . \qquad (5.2)$$

Pošto je, za $\nu > \mu > 0$,

$$[A(f^{\langle\nu\rangle} - f^{\langle\mu\rangle}), f^{\langle\nu\rangle} - f^{\langle\mu\rangle}] = \int_{\Delta_\nu \setminus \Delta_\mu} \lambda \, d[E_\lambda f, f]$$

nejednakost (5.2) povlači

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda \, d[E_\lambda f, f] < +\infty .$$

Tako smo dokazali $\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{L}_\infty$.

Prije nego što nastavimo dokaz propozicije 5.1 napomenimo da ako $\int_{\mathbb{R}} dE_\lambda x$ konvergira u $\mathcal{K}$, onda $\int_{\mathbb{R}} dE_\lambda x = x$. Stvarno, ako stavimo $y = \int_{\mathbb{R}} dE_\lambda x$, onda imamo

$$A^{-1}y = \int_{\mathbb{R}} t^{-1} dE_t y = \int_{\mathbb{R}} t^{-1} dE_t \left(\int_{\mathbb{R}} dE_\lambda x\right) = \int_{\mathbb{R}} t^{-1} dE_t x = A^{-1}x .$$

Dakle $y = x$.

Sada ćemo dokazati $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{D}[JA]$. Za $f \in \mathcal{L}_\infty$, $n \geq m$ i sa prethodno uvedenom notacijom, imamo

$$[A(f^{\langle n\rangle} - f^{\langle m\rangle}), f^{\langle n\rangle} - f^{\langle m\rangle}]$$

$$= \int_{\Delta_n \setminus \Delta_m} \lambda \, d[E_\lambda f, f] \longrightarrow 0 \qquad (n,m \longrightarrow +\infty) . \qquad (5.3)$$

Uočimo da $(f^{\langle n\rangle}) \subseteq \mathcal{D}(A)$. Pošto smo pretpostavili da $0 \in \rho(A)$, imamo

$$[Ax,x] \geq \|A^{-1}\|^{-1} \|x\|^2 \qquad (x \in \mathcal{D}(A)) .$$

Prema relaciji (5.3), odavde slijedi da je $(f^{\langle n\rangle})$ Cauchyjev niz s obzirom na normu $\|\cdot\|$ u $\mathcal{K}$. Prema tome $\int_{\mathbb{R}} dE_\lambda f$ konvergira u $\mathcal{K}$. Na osnovu prethodne napomene vrijedi $\int_{\mathbb{R}} dE_\lambda f = f$, tj.

$$\|f^{\langle n\rangle} - f\| \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow +\infty) . \qquad (5.4)$$

Prema karakterizaciji skupa $\mathcal{D}[JA]$ datoj na početku ovog dokaza iz relacija (5.3) i (5.4) slijedi $f \in \mathcal{D}[JA]$. Propozicija je dokazana.

PRIMJEDBA 5.2. Na osnovu posljednjeg dijela dokaza propozicije 5.1 imamo $\int_{\mathbb{R}} dE_\lambda f = f$ za sve $f \in \mathcal{D}[JA]$. Ovo je poboljšanje teorema 6.1 (ii) iz [47] za operator A sa osobinom $0 \in \rho(A)$.

PRIMJEDBA 5.3. Vektorski prostor $\mathcal{D}[JA]$ sa skalarnim produktom $((JA)^{1/2}\cdot,(JA)^{1/2}\cdot)$ je Hilbertov prostor i ovaj skalarni produkt se podudara sa skalarnim produktom $[A\cdot,\cdot]$ na $\mathcal{D}(A)$. Za $f \in \mathcal{D}[JA]$ i niz $(f^{\langle n\rangle}) \subseteq \mathcal{D}(A)$, definisan kao u dokazu propozicije 5.1, iz relacija (5.3) i (5.4) slijedi da $f^{\langle n\rangle} \to f$ $(n \to +\infty)$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{D}[JA]$. Zbog toga za svako $f,g \in \mathcal{D}[JA]$ imamo

$$\int_{\mathbb{R}}\lambda d[E_\lambda f,g] = \lim_{n\to+\infty}\int_{\Delta_n}\lambda d[E_\lambda f,g] = \lim_{n\to+\infty}\int_{\Delta_n}\lambda d[E_\lambda f^{\langle n\rangle},g^{\langle n\rangle}]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}[Af^{\langle n\rangle},g^{\langle n\rangle}] = \lim_{n\to+\infty}((JA)^{1/2}f^{\langle n\rangle},(JA)^{1/2}g^{\langle n\rangle})$$

$$= ((JA)^{1/2}f,(JA)^{1/2}g) .$$

TEOREM 5.4. Za definitibilan operator A vrijedi

$$\mathcal{D}[JA] = \mathcal{L}_\infty .$$

DOKAZ. Neka je $\Delta_\infty \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $\mathbb{R}\setminus\Delta_\infty$ kompaktan interval koji sadrži u svojoj unutrašnjosti sve konačne kritične tačke operatora A i nulu. Stavimo $\mathcal{K}_\infty := E(\Delta_\infty)\mathcal{K}$. Operator $A_\infty := A|_{\mathcal{K}_\infty}$ ima ograničen inverzni operator. U slučaju da operator A ima definitizirajući polinom parnog stepena prostor $(\mathcal{K}_\infty,|[\cdot,\cdot]|)$ je Hilbertov prostor i jednakost $\mathcal{D}[JA] = \mathcal{L}_\infty$ lako slijedi. U slučaju da operator A ima definitizirajući polinom neparnog stepena operator A_∞ je pozitivan ili negativan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K}_\infty,[\cdot,\cdot])$. Neka je J_o fundamentalna simetrija na $\mathcal{K}$ koja komutira sa $E(\Delta_\infty)$. Tada je $J_o|_{\mathcal{K}_\infty}$ fundamentalna simetrija na $\mathcal{K}_\infty$. Dekompozicija $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\infty [\dot+] \mathcal{K}_\infty^{\perp}$ redukuje operatore J_oA, $|J_oA|$ i $|J_oA||_{\mathcal{K}_\infty^\perp}$ je ograničen operator. Ovdje $|J_oA|$ označava apsolutnu vrijednost hermitskog operatora J_oA u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{K},(\cdot,\cdot)_o)$, $(x,y)_o = [J_ox,y]$ $(x,y \in \mathcal{K})$. Zbog toga ista dekompozicija redukuje operator $(|J_oA| + I)^{1/2}$, pa vrijedi

$$\mathcal{D}((|J_oA| + I)^{1/2}) = \mathcal{K}_\infty^{\perp} [\dot+] \mathcal{D}(|J_oA_\infty|^{1/2}) .$$

Na osnovu primjedbe 1.4 i jednakosti (1.4) imamo $\mathcal{D}[J_oA] = \mathcal{D}((|J_oA| + I)^{1/2})$ i $\mathcal{D}[J_oA_\infty] = \mathcal{D}(|J_oA_\infty|^{1/2})$. Odavde slijedi

$$\mathcal{D}[J_oA] = \mathcal{K}_\infty^{\perp} [\dot+] \mathcal{D}[J_oA_\infty] . \qquad (5.5)$$

Propozicija 5.1 povlači

$$\mathcal{D}\,[J_oA_\infty] = \left\{ f \in \mathcal{K}_\infty : \left| \int_{\Delta_\infty} \lambda d[E_\lambda f, f] \right| < +\infty \right\}. \tag{5.6}$$

Iz jednakosti (5.5) i (5.6) slijedi

$$\mathcal{D}\,[J_oA] = \left\{ f \in \mathcal{K} : \left| \int_{\Delta_\infty} \lambda d[E_\lambda f, f] \right| < +\infty \right\}.$$

Pošto vrijedi $\mathcal{D}\,[J_oA] = \mathcal{D}\,[JA]$ teorem je dokazan.

PRIMJEDBA 5.5. Iz primjedbe 5.2 i jednakosti (5.5) slijedi da za svako $f \in \mathcal{D}\,[JA]$ vrijedi

$$E(\Delta_\infty)f = \int_{\Delta_\infty} dE_\lambda f\ . \tag{5.7}$$

Napomenimo da ako je ∞ regularna kritična tačka definitibilnog operatora A, jednakost (5.7) vrijedi za svako $f \in \mathcal{K}$.

II. DIFERENCIJALNI OPERATORI U HILBERTOVOM PROSTORU $L^2(a,b,|r|)$

II.1. Kvazi-diferencijalni izrazi na intervalu (a,b)

U daljem ćemo razmatrati formalni diferencijalni izraz ℓ 2n-tog reda zadat na intervalu (a,b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$$\ell(f) = (-1)^n(p_o f^{(n)})^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_1 f^{(n-1)})^{(n-1)} + \dots + p_n f ,$$

$$f^{(j)} = \frac{d^j f}{dx^j} , \quad j=1,2,\dots . \tag{1.1}$$

Pretpostavljamo da su koeficijenti $p_o,p_1,\dots,p_n$ realne izmjerive funkcije definisane na (a,b) i da su funkcije $1/p_o,p_1,\dots,p_n$ integrabilne na svakom kompaktnom podintervalu intervala (a,b) . Pod ovim pretpostavkama nije moguće dati direktnu definiciju za $\ell(f)$ čak i ako postoje svi izvodi funkcije f do 2n-tog reda. Da bi dao definiciju za $\ell(f)$ i pod ovako opštim pretpostavkama o koeficijentima Krein [37] (vidi takođe knjigu Naimark [56, §15]) je uveo kvazi-izvode funkcije f na slijedeći način

$$\begin{aligned} f^{[0]} &= f \\ f^{[k]} &= \frac{d}{dx} f^{[k-1]} \qquad (k = 1,2,\dots,n-1) , \\ f^{[n]} &= p_o \frac{d}{dx} f^{[n-1]} , \\ f^{[n+k]} &= p_k f^{[n-k]} - \frac{d}{dx} f^{[n+k-1]} \qquad (k = 1,2,\dots,n) . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Sada definišemo

$$\ell(f) := f^{[2n]} . \tag{1.3}$$

Definicija (1.3) podudara se sa (1.1) u slučaju da $p_{n-k} \in C^k(a,b)$, $k = 0,1,\dots,n$.

Diferencijalni izraz $\ell(f)$ na intervalu (a,b) ima smisla za neku funkciju f ako na intervalu (a,b) postoji kvazi-izvod funkcije f 2n-tog reda, a ovo je slučaj ako postoje svi kvazi-izvodi funkcije f do, uključivo, (2n-1)-og reda i ako su oni apsolutno neprekidne funkcije na svim kompaktnim podintervalima intervala (a,b

Za ovakve funkcije f rekurzivnim formulama (1.2) kvazi-izvod $f^{[2n]}$ definisan je gotovo svuda na (a,b) .

Važno je da formula parcijalne integracije vrijedi za izraz ℓ . Naime, za $k = 1,\ldots,n$ vrijedi

$$\int_\alpha^\beta f^{[n+k]} g^{*(n-k)} dx$$
$$= \int_\alpha^\beta (p_k f^{[n-k]} g^{*(n-k)} + f^{[n+k-1]} g^{*(n-(k-1))}) dx$$
$$- \left[f^{[n+k-1]} g^{*(n-k)} \right]_\alpha^\beta .$$

Ovdje su funkcije f i g takve da izraz ℓ za njih ima smisla i $[\alpha,\beta]$ je kompaktan podinterval intervala (a,b) . Uzastpna primjena gornje formule daje

$$\int_\alpha^\beta \ell(f) g^* dx = \int_\alpha^\beta \sum_{j=0}^n p_j f^{(n-j)} g^{*(n-j)} dx - \sum_{j=1}^n \left[f^{[2n-j]} g^{*(j-1)} \right]_\alpha^\beta , \tag{1.4}$$

i

$$\int_\alpha^\beta f \ell(g)^* dx = \int_\alpha^\beta \sum_{j=0}^n p_j f^{(n-j)} g^{*(n-j)} dx - \sum_{j=1}^n \left[f^{(j-1)} g^{*[2n-j]} \right]_\alpha^\beta . \tag{1.5}$$

Odavde slijedi Lagrangeova jednakost

$$\ell(f) g^* - f \ell(g)^* = \frac{d}{dx} [\![f,g]\!] , \tag{1.6}$$

gdje je, za $x \in (a,b)$,

$$[\![f,g]\!](x) := \sum_{j=1}^n (f^{(j-1)}(x) g^{*[2n-j]}(x) - f^{[2n-j]}(x) g^{*(j-1)}(x)) .$$

U ovom radu proučavamo spektralne osobine jednačine

$$\ell(f) - \lambda r f = 0 \quad \text{na} \quad (a,b) , \tag{1.7}$$

gdje je r realna izmjeriva (težinska) funkcija definisana na (a,b) integrabilna na svakom kompaktnom podintervalu intervala (a,b) i za koju pretpostavljamo da je <u>indefinitna</u> , tj. oba skupa $\Delta_+ = \{ x \in (a,b) : r(x) > 0 \}$ i $\Delta_- = \{ x \in (a,b) : r(x) < 0 \}$ imaju pozitivnu Lebesgueovu mjeru.

Za problem (1.7) kažemo da je <u>regularan</u> ako je $-\infty < a < b < +\infty$ i ako su funkcije $1/p_0, p_1, \ldots, p_n, r$ integrabilne na $[a,b]$. Za rubnu tačku a (b, respektivno) problema (1.7) kažemo da je <u>singularna</u> ako je $a = -\infty$ ($b = +\infty$, respektivno) ili bar jedna od funkcija $1/p_0, p_1, \ldots, p_n, r$ nije integrabilna u okolini tačke a (b, respektivno).

II.2. <u>Operator $\widetilde{B}$</u>

U ovoj glavi bavimo se diferencijalnim operatorima koji su u odgovarajućem Hilbertovom prostoru pridruženi kvazi-diferencijalnoj jednačini 2n-tog reda

$$\ell(f) - \lambda |r| f = 0 \quad \text{na} \quad (a,b) . \tag{2.1}$$

Pošto je $|r(x)| \geqslant 0$ ($x \in (a,b)$) u ovoj glavi indefinitnost težinske funkcije r ne dolazi do izražaja. Ovdje je od posebnog interesa mogućnost da težinska funkcija $|r|$ degeneriše, tj. da skup $\{ x \in (a,b) : r(x) = 0 \}$ ima pozitivnu Lebesgueovu mjeru.

Prostor svih izmjerivih funkcija f definisanih na (a,b) za koje je $\int_a^b |f|^2 |r| \, dx < +\infty$ označimo sa $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$. Ako pretpostavimo da je

$$|r(x)| > 0 \quad \text{za gotovo sve} \quad x \in (a,b) , \tag{2.2}$$

onda sa $L^2(a,b,|r|)$ označimo prostor klasa ekvivalencije funkcija gotovo svuda jednakih na (a,b). Ovo je Hilbertov prostor i u njemu se jednačini (2.1) pod uslovom (2.2) mogu pridružiti određeni simetrični operatori. U specijalnom slučaju $r(x) = 1$ $(x \in (a,b))$ ovo je urađeno u radovima Kreina [37] i Naimarka [56, Glava V]. Slučaj kada težinska funkcija zadovoljava uslov (2.2) razmatran je u knjigama Weidman [60], Jörgens [27], Jörgens, Rellich [28], vidjeti takođe Krein [37, Dio II, § 11]. U ovom slučaju maksimalan diferencijalni operator $\widetilde{B}$ pridružen jednačini (2.1) definiše se na slijedeći način.

Domen $\mathcal{D}(\widetilde{B})$ sastoji se od funkcija, tj. klasa ekvivalencije $f \in L^2(a,b,|r|)$ za koje diferencijalni izraz ℓ ima smisla na (a,b) i za koje vrijedi jednakost $\ell(f) = |r| g$, za neko $g \in L^2(a,b,|r|)$. Za $f \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ stavljamo $\widetilde{B}f := g$ ako je $\ell(f) = |r| g$.

Lako se vidi da je definicija ovog operatora korektna.

Slučaj kada nenegativna težinska funkcija degeneriše proučavali su Everitt, Kwong, Zettl [17] za regularnu jednačinu drugog reda, kao i Daho, Langer [14] uz drugačije pretpostavke o koeficijentima p_0 i p_1, za singularnu jednačinu drugog reda.

U daljim razmatranjima mi ćemo iskoristiti neke ideje iz [17] i [14] da bi jednačini (2.1), bez pretpostavke (2.2), pridružili izvjesne operatore. Napomenimo da vrijedi $\int_a^b |r|dx > 0$, tj. težinska funkcija $|r|$ nije jednaka nuli gotovo svuda na (a,b).

Kao i u [17] iz vektorskog prostora funkcija $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$ izvodimo Hilbertov prostor $L^2(a,b,|r|)$ kao skup klasa ekvivalencije funkcija iz $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$; prvo definišemo nula element $0_{|r|}$ prostora $L^2(a,b,|r|)$ kao klasu

$$\{ f \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|) : (rf)(x) = 0 \text{ za gotovo sve } x \in (a,b)\} ;$$

a zatim i prostor $L^2(a,b,|r|)$ kao faktorski prostor $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)/0_{|r|}$. Za klase ekvivalencije $f,g \in L^2(a,b,|r|)$ norma i skalarni produkt su dati sa

$$\|f\| := (\int_a^b |\hat{f}|^2 |r|\,dx)^{1/2} , \qquad (f,g) := \int_a^b \hat{f}\hat{g}^* |r|\,dx , \tag{2.3}$$

pri čemu je $\hat{f} \in f$, $\hat{g} \in g$. Dokaz kompletnosti prostora $L^2(a,b,|r|)$ izvodi se na uobičajeni način i $(L^2(a,b,|r|),(\cdot,\cdot))$ je Hilbertov prostor.

Označimo sa $\mathcal{W}$ uniju svih otvorenih podintervala Δ intervala (a,b) za koje je $\int_\Delta |r|dx = 0$. Stavimo $\mathcal{W}' = (a,b)\setminus\mathcal{W}$. Ako definišemo mjeru $\hat{m}$ na (a,b) sa $\hat{m}(\Delta) = \int_\Delta |r|dx$, Δ izmjeriv podskup intervala (a,b), onda imamo $\mathcal{W}' = \operatorname{supp} \hat{m}$. Skup $\mathcal{W}$ je očigledno otvoren podskup intervala (a,b) i vrijedi

$$r(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve } x \in \mathcal{W} . \tag{2.4}$$

Za bilo koji $x \in \mathcal{W}'$ i bilo koji otvoren interval Δ, $\Delta \subsetneq (a,b)$ koji sadrži tačku x imamo $\int_\Delta |r|\,dx > 0$ i prema tome $m(\Delta \cap \mathcal{W}') > 0$, gdje m označava Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}$. Zbog toga, za bilo koji skup $\mathbb{D}$, $\mathbb{D} \subseteq (a,b)$, $\hat{m}$-mjere nula skup $\mathcal{W}'\setminus\mathbb{D}$ je gust u $\mathcal{W}'$. Zaista, ovo slijedi iz činjenice da za bilo koji $x \in \mathcal{W}'$ i za bilo koji podinterval Δ intervala (a,b) za koji $x \in \Delta$ imamo $m((\Delta\setminus\{x\}) \cap (\mathcal{W}'\setminus\mathbb{D})) > 0$. Takođe se lako vidi da zatvoren skup $\mathcal{W}'$ nema izolovanih tačaka.

Sada u Hilbertovom prostoru $L^2(a,b,|r|)$ definišemo maksimalan diferencijalni operator $\tilde{B}$ pridružen jednačini (2.1).

Domen $\mathcal{D}(\tilde{B})$ sastoji se od svih klasa ekvivalencije $f \in L^2(a,b,|r|)$ za koje postoji funkcija $\bar{f} \in f$ takva da:

(2.A) postoje kvazi-izvodi $\bar{f}^{[j]}$, $j = 0,1,\ldots,2n-1$ funkcije $\bar{f}$ i oni su apsolutno neprekidne funkcije na kompaktnim podintervalima intervala (a,b) , tj. diferencijalni izraz ℓ ima smisla na (a,b) za funkciju $\bar{f}$;

(2.B) jednakost

$(\ell(\bar{f}))(x) = (|r|\hat{g})(x)$ za gotovo sve $x \in (a,b)$

vrijedi za neko $\hat{g} \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|)$.

Jednakost u uslovu (2.B) i jednakost (2.4) povlače

$$(\ell(\bar{f}))(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve} \quad x \in \mathcal{W} . \tag{2.5}$$

LEMA 2.1. Klasa ekvivalencije $0_{|r|}$ iz $L^2(a,b,|r|)$ pripada domenu $\mathcal{D}(\tilde{B})$. Jedina funkcija iz $0_{|r|}$ koja zadovoljava uslove (2.A i B) je nula funkcija (tj. funkcija identički jednaka nuli na (a,b)) .

DOKAZ. Jasno je da nula funkcija pripada klasi $0_{|r|}$ i da ona zadovoljava uslove (2.A i B). Dakle $0_{|r|} \in \mathcal{D}(\tilde{B})$. Da bi dokazali drugu izjavu leme, neka je $y \in 0_{|r|}$ i pretpostavimo da funkcija y zadovoljava uslove (2.A i B), tj. da diferencijalni izraz ℓ ima smisla za funkciju y i da vrijedi jednakost $\ell(y) = |r|\hat{g}$ za neko $\hat{g} \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|)$. Pošto je funkcija y neprekidna, imamo $y(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}')$. Stvarno, ako pretpostavimo da za neko $x_0 \in \mathcal{W}'$ vrijedi $|y(x_0)| > 0$, onda postoji otvoren interval Δ koji sadrži tačku x_0 i $\varepsilon > 0$ takvi da je $|y(x)| > \varepsilon$ $(x \in \Delta)$. Pošto $x_0 \in \mathcal{W}'$ i $x_0 \in \Delta$ imamo $\int_\Delta |r| dx > 0$. Zbog toga

$$0 = \int_a^b |y|^2 |r| dx \geqslant \int_\Delta |y|^2 |r| dx \geqslant \varepsilon^2 \int_\Delta |r| dx > 0 .$$

Kontradikcija!

Kao lokalno apsolutno neprekidna funkcija na (a,b) , funkcija y ima izvod gotovo svuda na (a,b) . Označimo sa $\mathbb{D}$ skup svih tačaka iz (a,b) u kojima funkcija y nema izvod. Pošto su tačke skupa $\mathcal{W}' \setminus \mathbb{D}$ tačke nagomilavanja skupa $\mathcal{W}'$, slijedi $y'(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}' \setminus \mathbb{D})$. Stvarno, za tačku $x_0 \in \mathcal{W}' \setminus \mathbb{D}$ postoji niz (x_j) , $x_j \in \mathcal{W}' \setminus \{x_0\}$, $j = 1,2,\ldots$, takav da $x_j \to x_0$ $(j \to +\infty)$. Vrijedi $y'(x_0) = \lim_{j \to +\infty} (y(x_0) - y(x_j))/(x_0 - x_j) = 0$. Budući da je $m(\mathbb{D}) = 0$, skup $\mathcal{W}' \setminus \mathbb{D}$ je gust u $\mathcal{W}'$, pa neprekidnost funkcije y'

povlači da je $y'(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}')$. Na sličan način se pokazuje da je $y^{(k)}(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}', k = 2, \ldots, n-1)$ i da je $y^{(n)}(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}' \setminus \mathbb{D}_1)$, pri čemu je $\mathbb{D}_1$ skup Lebesgueove mjere nula na kome lokalno apsloutno neprekidna funkcija $y^{(n-1)}$ nema izvod. Funkcija $y^{[n]} = p_o y^{(n)}$ je neprekidna na (a,b). Budući da je $(p_o y^{(n)})(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}' \setminus \mathbb{D}_1)$ i skup $\mathcal{W}' \setminus \mathbb{D}_1$ je gust u $\mathcal{W}'$ imamo $y^{[n]}(x) = (p_o y^{(n)})(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}')$. Na sličan način zaključujemo da je $y^{[n+k]}(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}', k = 0,1,\ldots,n-1)$ i da je

$$y^{[2n]}(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{W}' \setminus \mathbb{D}_2), \tag{2.6}$$

gdje $\mathbb{D}_2$ označava skup mjere nula na kome lokalno apsolutno neprekidna funkcija $y^{[2n-1]}$ nema izvod. Jednakosti (2.5) i (2.6) daju

$$y^{[2n]}(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve } x \in (a,b). \tag{2.7}$$

Pošto funkcija r nije gotovo svuda jednaka nuli na (a,b), imamo da je $m(\mathcal{W}') > 0$, i specijalno $\mathcal{W}' \neq \emptyset$. Za $x_o \in \mathcal{W}'$ vrijedi

$$y^{[k]}(x_o) = 0 \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1). \tag{2.8}$$

Na osnovu teorema 2 iz [56, §16], iz relacija (2.7) i (2.8) slijedi da je funkcija y identički jednaka nuli na (a,b). Lema je dokazana.

KOROLAR 2.2. Pretpostavimo da klasa ekvivalencije $f \in L^2(a,b,|r|)$ pripada skupu $\mathcal{D}(\tilde{B})$. Tada postoji jedinstvena funkcija $\overline{f} \in f$ koja zadovoljava uslove (2.A i B).

DOKAZ. Neka su $\overline{f}_1, \overline{f}_2 \in f$ i pretpostavimo da funkcije $\overline{f}_1$ i $\overline{f}_2$ zadovoljavaju uslove (2.A i B). Tada vrijedi $\overline{f}_1 - \overline{f}_2 \in O_{|r|}$ i funkcija $\overline{f}_1 - \overline{f}_2$ zadovoljava uslove (2.A i B). Stvarno, očigledno je da diferencijalni izraz ℓ ima smisla za funkciju $\overline{f}_1 - \overline{f}_2$ i da vrijedi jednakost $\ell(\overline{f}_1 - \overline{f}_2) = |r|(\hat{g}_1 - \hat{g}_2)$ gotovo svuda na (a,b), pri čemu su $\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|)$ takvi da gotovo svuda na (a,b) vrijedi $\ell(\overline{f}_1) = |r|\hat{g}_1$ i $\ell(\overline{f}_2) = |r|\hat{g}_2$. Lema 2.1 povlači da je $\overline{f}_1 - \overline{f}_2 = 0$ na (a,b).

U daljem, jedinstvenu funkciju iz klase ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\hat{B}$ koja zadovoljava uslove (2.A i B) označavaćemo sa $\overline{f}$. Preslikavanje $f \longmapsto \overline{f}$ $(f \in \mathcal{D}(\tilde{B}))$ je linearno.

KOROLAR 2.3. Neka je $f \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ i neka su $\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|$ takvi da $\ell(\overline{f}) = |r|\hat{g}_j$ gotovo svuda na (a,b), $j = 1,2$. Tada funkcije $\hat{g}_1$ i $\hat{g}_2$ pripadaju istoj klasi ekvivalencije iz $L^2(a,b,|r|$

DOKAZ. Iz jednakosti $\ell(\overline{f}) = |r|\hat{g}_j$ gotovo svuda na (a,b),

$j = 1,2$ slijedi $|r|(\hat{g}_1 - \hat{g}_2) = 0$ gotovo svuda na (a,b) , tj. $\hat{g}_1 - \hat{g}_2 \in 0_{|r|}$.

Na osnovu korolara 2.3 možemo definisati maksimalan diferencijalni operator $\widetilde{B}$ pridružen jednačini (2.1) .

Za $f \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ stavljamo

$$\widetilde{B}f := g \text{ ako je } \ell(\overline{f}) = |r|\hat{g} \text{ gotovo svuda na } (a,b) \text{ i } \hat{g} \in g .$$

Očigledno, ako $\hat{g}_1 \in g$, onda je $\ell(\overline{f}) = |r|\hat{g}_1$ gotovo svuda na (a,b) .

PRIMJEDBA 2.4. Funkcije koje imaju različite vrijednosti na skupu $\mathcal{W}$ su u izvjesnom smislu identificirane u prostoru $L^2(a,b,|r|)$. Zbog toga izgleda da vrijednosti koeficijenata $p_0,\dots,$ na skupu $\mathcal{W}$ nisu bitne za definiciju operatora $\widetilde{B}$. Ovo nije tačno jer za koeficijente koji se razlikuju od koeficijenata $p_0,\dots,p_n$ samo na skupu $\mathcal{W}$ jednakost u uslovu (2.B) ne mora biti zadovoljena Dakle, domen $\mathcal{D}(\widetilde{B})$ zavisi od vrijednosti koeficijenata $p_0,\dots,p_n$ na skupu $\mathcal{W}$. Vrijednosti koeficijenata $p_0,\dots,p_n$ na $\mathcal{W}$ ne utiču na vrijednosti maksimalnog diferencijalnog operatora. Zaista, neka su $p_{0,1},\dots,p_{n,1}$ realne funkcije definisane na (a,b) takve da su $1/p_{0,1},p_{1,1},\dots,p_{n,1}$ lokalno integrabilne funkcije na (a,b) i $(p_j - p_{j,1})(x) = 0$ za gotovo sve $x \in \mathcal{W}'$, $j = 0,1,\dots,n$. Označimo sa ℓ_1 diferencijalni izraz definisan na (a,b) u odnosu na koeficijente $p_{0,1},\dots,p_{n,1}$. Neka je $\widetilde{B}_1$ maksimalan diferencijalni operator pridružen jednačini $\ell_1(y) - \lambda|r|y = 0$ na (a,b) . Pretpostavimo da $f \in \mathcal{D}(\widetilde{B}_1) \cap \mathcal{D}(\widetilde{B})$. Na sličan način kao u lemi 2.1 može se pokazati da je

$$(\ell(\overline{f}))(x) = (\ell_1(\overline{f}))(x) \quad \text{za gotovo sve } x \in \mathcal{W}' .$$

Dakle za $\hat{g} \in \widetilde{B}f$ i $\hat{g}_1 \in \widetilde{B}_1 f$ vrijedi $|r|(\hat{g} - \hat{g}_1) = 0$ g.s. na $(a, b$ tj. $\widetilde{B}f = \widetilde{B}_1 f$.

Kao posljedicu leme 2.1 i korolara 2.2 i 2.3 dobili smo da se maksimalan diferencijalni operator pridružen jednačini (2.1) može definisati bez pretpostavke IV u radovima [11, s.2.2.2.] i [12, s.313] . U stvari iz naših razmatranja slijedi da je ova pretpostavka uvijek ispunjena.

U odjeljcima 3, 4, 5 i 6 mi slijedimo razmatranja data u knjizi Naimarka [56, Glava V] koja se bave specijalnim slučajem $r(x) = 1$ $(x \in (a,b))$. Većina tvrdnji datih ovdje dokazuje se na sličan način kao odgovarajuće tvrdnje u [56] . U dokazima koji su dati ovdje pokazano je kako se postupa sa različitostima koje nastaju

Kao i u [56] uvodimo restrikciju $\hat{B}_o$ operatora $\tilde{B}$ na domen $\mathcal{D}(\hat{B}_o)$ koji se sastoji od svih klasa ekvivalencije $f\in\mathcal{D}(\tilde{B}$ za koje postoji kompaktan podinterval $[\alpha,\beta]$ (koji zavisi od klase ekvivalencije f) intervala (a,b) takav da se funkcija $\bar{f}$ poništava van $[\alpha,\beta]$.

Za klase ekvivalencije $f\in\mathcal{D}(\hat{B}_o)$ i $h\in\mathcal{D}(\tilde{B})$ iz Lagrangeove jednakosti (1.6) slijedi

$$(\hat{B}_o f,h)-(f,\tilde{B}h)=(\ell(\bar{f}),\bar{h})_1-(\bar{f},\ell(\bar{h}))_1=0\,, \qquad (2.9$$

pri čemu $(\cdot,\cdot)$ označava skalarni produkt definisan u (2.3), a $(\cdot,\cdot)_1$ skalarni produkt u $L^2(a,b,1)$, tj. $(y,z)_1:=\int_a^b y(t)z^*(t)dt$ $y,z\in L^2(a,b,\ 1)$. Specijalno imamo

$$(\hat{B}_o f,h)=(f,\hat{B}_o h)\qquad (\,f,h\in\mathcal{D}(\hat{B}_o))\,. \qquad (2.1$$

II.3. Operator $\hat{B}$ u regularnom slučaju

U ovom odjeljku pretpostavljamo da je jednačina (2.1) regularna na $[a,b]$. Neka je $\hat{B}$ restrikcija operatora $\tilde{B}$ na domen

$$\mathcal{D}(\hat{B}):=\left\{f\in\mathcal{D}(\tilde{B}):\ \bar{f}^{[k]}(a)=\bar{f}^{[k]}(b)=0,\ k=0,1,\ldots,2n-1\right\}$$

Prema Lagrangeovoj jednakosti imamo

$$(\hat{B}f,h)=(f,\tilde{B}h)\qquad (\,f\in\mathcal{D}(\hat{B}),\ h\in\mathcal{D}(\tilde{B})\,)\,, \qquad (3.1)$$

$$(\hat{B}f,h)=(f,\hat{B}h)\qquad (\,f,h\in\mathcal{D}(\hat{B})\,)\,. \qquad (3.2)$$

LEMA 3.1. (vidite [11, lema 2.5.1], [56, § 17.3 lema 1]) Pretpostavimo da je jednačina (2.1) regularna na $[a,b]$ i da $f\in L^2(a,b,|r|)$. Jednačina $\ell(y)=|r|\hat{f}$, $\hat{f}\in f$ ima rješenje $\hat{h}$ takvo da $\hat{h}\in h\in\mathcal{D}(\hat{B})$ ako i samo ako je $(f,g)=0$ za sve $g\in L^2(a,b,|r|)$ za koje postoji $\hat{g}\in g$ takvo da je $\ell(\hat{g})=0$.

DOKAZ. Dokaz ove leme dat je u [11].

PRIMJEDBA 3.2. Neka je $\hat{f}$ rješenje jednačine $\ell(y)=0$. Funkcija $\hat{f}$ je neprekidna na $[a,b]$, pa pripada prostoru $L^2(a,b,|r|)$. Stavimo

$$\mathcal{M}=\{\,f\in L^2(a,b,|r|):\ \text{postoji}\ \hat{f}\in f\ \text{za koje je}\ \ell(\hat{f})=0\,\}\,.$$

Ovako definisan $\mathcal{M}$ je potprostor prostora $L^2(a,b,|r|)$ dimenzije $2n$. Da bi ovo dokazali primijetimo da je $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{D}(\tilde{B})$ i da su klase ekvivalencije $f_1,\ldots,f_k\in\mathcal{D}(\tilde{B})$ linearno nezavisne ako i samo ako su funkcije $\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_k$ linearno nezavisne. Posljednja izjava slijedi jer lema 2.1 povlači da je $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f_j = 0_{|r|}$ ako i samo ako $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j \overline{f}_j = 0$. Za $f \in \mathcal{M}$ funkcija $\overline{f}$ je rješenje jednačine $\ell(y) = 0$ Zbog toga je dimenzija potprostora $\mathcal{M}$ jednaka broju linearno nezavisnih rješenja jednačine $\ell(y) = 0$ koja pripadaju prostoru $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$. Pošto pretpostavljamo da je jednačina (2.1), a time i jednačina $\ell(y) = 0$ regularna na $[a,b]$, svako rješenje jednačine $\ell(y) = 0$ je neprekidno na $[a,b]$, pa pripada prostoru $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$ Dakle, dimenzija potprostora $\mathcal{M}$ jednaka je $2n$.

Na osnovu leme 3.1 imamo

$$L^2(a,b,|r|) = \mathcal{R}(\hat{B}) \oplus \mathcal{M} .$$

LEMA 3.3. ([56, §17.3 lema 2]) Za proizvoljne kompleksne brojeve $\alpha_0,\ldots,\alpha_{2n-1},\beta_0,\ldots,\beta_{2n-1}$ postoji klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ takva da je

$$\overline{f}^{[k]}(a) = \alpha_k \ , \ \overline{f}^{[k]}(b) = \beta_k \ , \ k = 0,1,\ldots,2n-1 . \tag{3.3}$$

DOKAZ. Pretpostavimo prvo da je $\alpha_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,2n-1$. Neka je $\hat{z}_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots,2n$, fundamentalan sistem rješenja jednačine $\ell(y) = 0$, za koji je

$$\hat{z}_\nu^{[k-1]}(b) = \delta_{\nu k} \qquad (\nu,k = 1,2,\ldots,2n) . \tag{3.4}$$

Funkcije $\hat{z}_\nu$, $\nu = 1,\ldots,2n$ su neprekidne na $[a,b]$, pa one pripadaju prostoru $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$. Neka su $z_\nu \in L^2(a,b,|r|)$ takvi da $\hat{z}_\nu \in z_\nu$, $\nu = 1,\ldots,2n$ i neka klasa ekvivalencije $f \in L^2(a,b,|r|)$ zadovoljava jednakosti

$$\begin{aligned}(f,z_\nu) &= -\beta_{2n-\nu} \quad (\nu = 1,2,\ldots,n-1,n)\\ (f,z_\nu) &= \beta_{2n-\nu} \quad (\nu = n+1,\ldots,2n-1,2n)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Klasu ekvivalencije f sa osobinama (3.5) možemo izabrati tako da ona pripada potprostoru $\mathcal{M}$. Zaista, ako stavimo $f = \xi_1 z_1 + \ldots + \xi_{2n} z_2$ onda uslov (3.5) postaje sistem linearnih jednačina sa nepoznatim $\xi_1,\ldots,\xi_{2n}$. Determinanta tog sistema je Grammova determinanta linearno nezavisnih rješenja $\hat{z}_1,\ldots,\hat{z}_{2n}$ jednačine $\ell(y) = 0$, dakle različita od nule.

Označimo sa $\hat{v}$ rješenje jednačine $\ell(y) = |r|\overline{f}$ koje zadovoljava uslove

$$\hat{v}^{[k]}(a) = 0 \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1) . \tag{3.6}$$

Tada $\hat{v} \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|)$ i

$$\hat{v}^{[k]}(b) = \beta_k \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1) .$$

Zaista, ako stavimo $\hat{v} \in v \in L^2(a,b,|r|)$ i primijenimo Lagrangeovu jednakost dobijamo

$$(f,z_\nu) = (|r|\hat{f},\hat{z}_\nu)_1 = (\ell(\hat{v}),\hat{z}_\nu)_1$$
$$= (\hat{v},\ell(\hat{z}_\nu))_1 + [\![\hat{v},\hat{z}_\nu]\!](b) - [\![\hat{v},\hat{z}_\nu]\!](a) \qquad (\nu = 1,\ldots,2n). \quad (3.$$

Iz relacija (3.6) slijedi $[\![\hat{v},\hat{z}_\nu]\!](a) = 0$, $\nu = 1,\ldots,2n$, a iz relacija (3.4) slijedi

$$[\![\hat{v},\hat{z}_\nu]\!](b) = -\hat{v}^{[2n-\nu]}(b) \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n) ,$$
$$[\![\hat{v},\hat{z}_\nu]\!](b) = \hat{v}^{[2n-\nu]}(b) \qquad (\nu = n+1,\ldots,2n-1,2n) .$$

Pored toga vrijedi $\ell(\hat{z}_\nu) = 0$, $\nu = 1,\ldots,2n$, pa relacije (3.5) i (3.7) daju

$$\hat{v}^{[k]}(b) = \beta_k \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1) .$$

Na osnovu gornje konstrukcije je jasno da $v \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ i da je $\hat{v} = \overline{v}$ Dakle, za klasu ekvivalencije $v \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ vrijedi

$$\overline{v}^{[k]}(a) = 0 , \quad \overline{v}^{[k]}(b) = \beta_k \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1) .$$

Na isti način, zamjenjujući uloge tačaka a i b može se dobiti klasa ekvivalencije $w \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ za koju je

$$\overline{w}^{[k]}(a) = \alpha_k , \quad \overline{w}^{[k]}(b) = 0 \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1) .$$

Klasa ekvivalencije $f = v + w$ pripada domenu $\mathcal{D}(\widetilde{B})$ i ona zadovoljava uslov (3.3). Lema je dokazana.

PROPOZICIJA 3.4. ([11, propozicija 2.5.3],[56,§17.3.III]) Ako je jednačina (2.1) regularna na $[a,b]$ onda je domen $\mathcal{D}(\hat{B})$ gust potprostor prostora $L^2(a,b,|r|)$.

DOKAZ. Dokaz ove propozicije dat je u [11].

TEOREM 3.5. ([56, §17 Teorem 1]) Neka je jednačina (2.1) regularna na $[a,b]$. Tada je $\hat{B}$ zatvoren simetričan operator sa indeksom defekta $(2n,2n)$. Operator $\widetilde{B}$ je hermitski adjungiran operatoru $\hat{B}$, tj. $\hat{B}^* = \widetilde{B}$.

DOKAZ. Prvo ćemo dokazati da je $\widetilde{B} = \hat{B}^*$. Jednakost (3.1) povlači da je $\widetilde{B} \subseteq \hat{B}^*$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $g \in \mathcal{D}(\hat{B}^*)$. Stavimo $\hat{B}^* g = h$. Neka je $\hat{z}$ rješenje jednačine $\ell(y) = |r|\hat{h}$, gdje je $\hat{h} \in h$. Ovo rješenje postoji na osnovu [56, §16, teorem 2] . Ako je $z \in L^2(a,b,|r|)$ takvo da $\hat{z} \in z$, onda $z \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ i $\widetilde{B}(z) = h$. Za bilo koju klasu ekvivalencije

$f \in \mathcal{D}(\hat{B})$ imamo

$$(h,f) = (\hat{B}^*g,f) = (g,\hat{B}f) .$$

Pored toga vrijedi

$$(h,f) = (\widetilde{B}z,f) = (z,\hat{B}f) \qquad (f \in \mathcal{D}(\hat{B})) .$$

Odavde slijedi da je

$$(z - g,\hat{B}f) = 0 \qquad (f \in \mathcal{D}(\hat{B})) ,$$

tj. klasa ekvivalencije $z - g$ je ortogonalna na $\mathcal{R}(\hat{B})$. Na osnovu leme 3.1 slijedi $z - g \in \mathcal{M}$. Budući da je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}(\widetilde{B})$ vrijedi $z - g \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$. Pošto $z \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ zaključujemo da $g \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$. Štaviše $\widetilde{B}(z - g) = 0_{|r|}$, tj. $\widetilde{B}g = \widetilde{B}z = h = \hat{B}^*g$.

Sada ćemo dokazati jednakost $\hat{B} = \widetilde{B}^*$. Iz već dokazane jednakosti $\widetilde{B} = \hat{B}^*$ slijedi $\widetilde{B}^* \supseteq \hat{B}$. Ostaje da se dokaže $\widetilde{B}^* \subseteq \hat{B}$. Inkluzija $\hat{B} \subseteq \widetilde{B}$ povlači $\widetilde{B}^* \subseteq \hat{B}^*$, a zbog $\widetilde{B} = \hat{B}^*$ vrijedi $\widetilde{B}^* \subseteq \widetilde{B}$ Neka je $z \in \mathcal{D}(\widetilde{B}^*)$. Tada $z \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ i $\widetilde{B}^*z = \widetilde{B}z$. Prema definiciji operatora $\widetilde{B}^*$, za bilo koje $f \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ imamo

$$(\widetilde{B}^*z,f) = (z,\widetilde{B}f) , \quad \text{tj.} \quad (\widetilde{B}z,f) = (z,\widetilde{B}f) .$$

Primjenom Lagrangeove jednakosti dobijamo

$$(\widetilde{B}z,f) = [\![\bar{z},\bar{f}]\!](b) - [\![\bar{z},\bar{f}]\!](a) + (z,\widetilde{B}f) .$$

Iz posljednje dvije jednakosti slijedi

$$[\![\bar{z},\bar{f}]\!](b) - [\![\bar{z},\bar{f}]\!](a) = 0 \qquad (f \in \mathcal{D}(\widetilde{B})) . \qquad (3.8$$

Prema lemi 3.3 moguće je odabrati klasu ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ tako da vrijednosti $\bar{f}^{[k]}(a),\bar{f}^{[k]}(b)$, $k = 0,1,\ldots,2n-1$ budu bilo koji unaprijed dati kompleksni brojevi. Zbog toga slijedi da je relacija (3.8) moguća samo ako je

$$\bar{z}^{[k]}(a) = \bar{z}^{[k]}(b) = 0 \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1) ,$$

tj. samo ako je $z \in \mathcal{D}(\hat{B})$. Odavde, zbog $\widetilde{B}^* \subseteq \widetilde{B}$, slijedi $\widetilde{B}^* \subseteq \hat{B}$ i jednakost $\widetilde{B}^* = \hat{B}$ je dokazana. Ova jednakost, zajedno sa jednakošću (3.2) , povlači da je $\hat{B}$ zatvoren simetričan operator.

Sada ćemo dokazati da operator $\hat{B}$ ima indeks defekta (2n,2 Neka je λ kompleksan broj iz gornje poluravni. Prema definiciji, prvi defektni broj operatora $\hat{B}$ je broj linearno nezavisnih rješenja jednačine

$$\hat{B}^*y = \lambda y ,$$

tj. broj linearno nezavisnih rješenja jednačine

$$\widetilde{B}y = \lambda y .$$

Na osnovu jedne izjave u primjedbi 3.2 ovaj broj je jednak broju linearno nezavisnih rješenja jednačine

$$\ell(\bar{y}) = \lambda |r| \bar{y} , \qquad (3.9)$$

jer, kao i u primjedbi 3.2, sva rješenja ove jednačine pripadaju prostoru $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$. U razmetranjima u knjizi [56, §16.2 i §16.3] izraz $\ell(y)$ može se zamijeniti izrazom $\ell(y) - \lambda|r|y$ i svi tamo navedeni rezultati i dalje vrijede. Da bi to dokazali potrebno je samo definisati matričnu funkciju $A(x)$ u relaciji (13), §16.2 u [56] na nešto drugačiji način. Tada teorem 3 iz [56, §16] povlači da jednačina (3.9) ima 2n linearno nezavisnih rješenja. Dakle prvi defektni broj operatora $\hat{B}$ jednak je 2n . Na isti način zaključujemo da je i drugi defektni broj operatora $\hat{B}$ jednak 2n , tj. da operator $\hat{B}$ ima indeks defekta (2n,2n) . Teorem je dokazan.

PRIMJEDBA 3.6. U ovoj primjedbi ne pretpostavljamo da je jednačina (2.1) regularna na (a,b) . Neka je $\Delta = [\alpha,\beta]$ kompaktan podinterval intervala (a,b) . Hilbertov prostor $L^2(\alpha,\beta,|r|)$ može se smatrati potprostorom Hilbertovog prostora $L^2(a,b,|r|)$ ako klase ekvivalencije $h \in L^2(\alpha,\beta,|r|)$ smatramo skupom svih funkcija $\hat{h} \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|)$ takvih da je $\hat{h}|_\Delta \in h$ i $\hat{h}\chi_{(a,b)\setminus\Delta} \in 0_{|r|} \in L^2(a,b,|r|)$.
Ovdje i ubuduće $\chi_{(a,b)\setminus\Delta}$ označava funkciju jednaku 1 na $(a,b)\setminus\Delta$ i jednaku nula na Δ . Za klasu ekvivalencije $g \in L^2(a,b,|r|)$ označimo sa g_Δ klasu ekvivalencije iz $L^2(\alpha,\beta,|r|)$ koja se sastoji od restrikcija na Δ funkcija iz g . Diferencijalni izraz definisan s obzirom na koeficijente $p_0,p_1,\dots,p_n$ na intervalu Δ , kao u odjeljku 1, označavaćemo sa ℓ_Δ . Jednačina

$$\ell_\Delta(y) - \lambda|r|y = 0 \quad \text{na } [\alpha,\beta]$$

je regularna. Operatore pridružene ovoj jednačini u prostoru $L^2(\alpha,\beta,|r|)$ označavaćemo sa $\tilde{B}_\Delta$, $\hat{B}_{0,\Delta}$, $\hat{B}_\Delta$. U ovoj notaciji imamo

$$\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta) \subseteq \mathcal{D}(\hat{B}_0) .$$

Zaista, prema definiciji domena $\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)$, za klasu ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)$ postoji funkcija $\bar{f} \in f$ za koju diferencijalni izraz ℓ_Δ ima smisla na intervalu Δ (tj. kvazi-izvodi $\bar{f}^{[k]}$, $k = 0,1,\dots,2n$ postoje i oni su apsolutno neprekidne funkcije na $[\alpha,\beta]$) , za koju za neko $\hat{g}_1 \in \mathbb{L}^2(\alpha,\beta,|r|)$ vrijedi jednakost

$$\ell_\Delta(\bar{f}) = |r|\hat{g}_1 \quad \text{gotovo svuda na } \Delta ,$$

i takva da je

Pošto $\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)$ smatramo potprostorom prostora $L^2(a,b,|r|)$ možemo uzeti da je funkcija $\overline{f}$ jednaka nuli na $(a,b)\setminus\Delta$. Tada funkcija $\overline{f}$ zadovoljava uslove (2.A) i (2.B) pa $f\in\mathcal{D}(\widetilde{B})$ ili, preciznije, $f\in\mathcal{D}(\hat{B}_o)$.

PROPOZICIJA 3.7. ([56, §17.3, VII]) Operator $\hat{B}$ je zatvorenje operatora $\hat{B}_o$, tj. $\hat{B} = (\hat{B}_o)^{**}$.

DOKAZ. Označimo zatvorenje operatora $\hat{B}_o$ sa $\overline{\hat{B}}_o$. Prema teoremu 3.5 inkluzija $\hat{B}_o\subseteq\hat{B}$ povlači $\overline{\hat{B}}_o\subseteq\hat{B}$. Ostaje da se dokaže inkluzija $\hat{B}\subseteq\overline{\hat{B}}_o$. Da bi dokazali ovu inkluziju uzmimo bilo koji zatvoren podinterval $\Delta=[\alpha,\beta]$ intervala (a,b) i bilo koje $h\in\mathcal{D}((\hat{B}_o)^*)$. Tada vrijedi

$$((\hat{B}_o)^*h,f) = (h,\hat{B}_of) \qquad (f\in\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)). \tag{3.10}$$

Zbog $f\in\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)$, očigledno je da skalarni produkti u jednakosti (3.10) mogu biti izraženi kao integrali nad Δ, tj. ovi skalarni produkti podudaraju se sa skalarnim produktom u prostoru $L^2(\alpha,\beta,|r|)$ koji označavamo sa $(\cdot,\cdot)_\Delta$. Tada (3.10) glasi

$$(((\hat{B}_o)^*h)_\Delta, f_\Delta)_\Delta = (h_\Delta,\hat{B}_\Delta f_\Delta)_\Delta \qquad (f\in\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)).$$

Odavde je

$$h_\Delta\in\mathcal{D}((\hat{B}_\Delta)^*) = \mathcal{D}(\widetilde{B}_\Delta) \tag{3.11}$$

i

$$((\hat{B}_o)^*h)_\Delta = \widetilde{B}_\Delta h_\Delta. \tag{3.12}$$

Relacija (3.12) vrijedi za bilo koji kompaktan podinterval Δ intervala (a,b). Ako je $\Delta'\subseteq\Delta$, onda je $\overline{h_{\Delta'}} = \overline{h}_\Delta|_{\Delta'}$ (ovdje znak — iznad klase ekvivalencije ima značenje određeno poslije korolara 2.2). Odavde slijedi da postoji jedinstvena funkcija $\hat{h}\in h$ za koju diferencijalni izraz ℓ ima smisla na (a,b). Za funkciju $\hat{h}$ vrijedi $\hat{h}|_\Delta = \overline{h_\Delta}$ i $\ell_\Delta(\overline{h_\Delta}) = \ell(\hat{h})|_\Delta$. Neka $\hat{g}\in(\hat{B}_o)^*h$. Tada $\hat{g}|_\Delta\in((\hat{B}_o)^*h)_\Delta$. Iz definicije operatora $\widetilde{B}_\Delta$ i relacije (3.12) slijedi

$$\ell_\Delta(\overline{h_\Delta}) = \ell(\hat{h})|_\Delta = |r|\,\hat{g}|_\Delta \quad \text{gotovo svuda na } \Delta.$$

Pošto posljednja jednakost vrijedi za bilo koji kompaktan podinterval Δ intervala (a,b) zaključujemo da vrijedi

$$\ell(\hat{h}) = |r|\hat{g} \quad \text{gotovo svuda na } (a,b).$$

Budući da $\hat{g}\in(\hat{B}_o)^*h\subseteq\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$, vidimo da funkcija $\hat{h}$ zadovoljav uslov (2.B). Dakle $h\in\mathcal{D}(\widetilde{B})$ i prema definiciji operatora $\widetilde{B}$ imamo

$$\widetilde{B}h = (\hat{B}_o)^* h \ .$$

Ovim smo dokazali da je $(\hat{B}_o)^* \subseteq \widetilde{B}$, tj., prema teoremu 3.5, $(\hat{B}_o)^* \subseteq \hat{B}^*$. Iz posljednje inkluzije slijedi $\hat{B} \subseteq (\hat{B}_o)^{**}$. Propozicija je dokazana.

II.4. Operator $\hat{B}$ u singularnom slučaju

PROPOZICIJA 4.1. ([56, §17.4,III], [11, propozicija 2.5.4]) Domen $\mathcal{D}(\hat{B}_o)$ je gust potprostor prostora $L^2(a,b,|r|)$.

DOKAZ. Treba da pokažemo da za klasu ekvivalencije $h \in L^2(a,b,|r|)$ koja je ortogonalna na $\mathcal{D}(\hat{B}_o)$ vrijedi $h = 0_{|r|}$. Neka je $\Delta = [\alpha,\beta]$ bilo koji kompaktan podinterval intervala (a,b). Pošto, prema primjedbi 3.6, vrijedi $\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta) \subseteq \mathcal{D}(\hat{B}_o)$, klasa ekvivalencije h je ortogonalna na $\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)$. Na osnovu propozicije 3.4 skup $\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)$ je gust u $L^2(\alpha,\beta,|r|)$, pa je klasa ekvivalencije h ortogonalna na $L^2(\alpha,\beta,|r|)$ u Hilbertovom prostoru $L^2(a,b,|r|)$. Odavde slijedi da za $\hat{h} \in h$ imamo

$$(|r|\hat{h})(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve} \quad x \in \Delta.$$

Pošto je Δ bilo koji kompaktan podinterval intervala (a,b) , dobijamo

$$(|r|\hat{h})(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve} \quad x \in (a,b) \ .$$

Dakle $h = 0_{|r|}$. Propozicija je dokazana.

Iz relacije (2.10) i propozicije 4.1 slijedi da je operator $\hat{B}_o$ simetričan. Zbog toga operator $\hat{B}_o$ ima zatvorenje koje označavamo sa $\hat{B}$. Operator $\hat{B}$ je takođe simetričan. Prema propoziciji 3.7 ova definicija operatora $\hat{B}$ u regularnom slučaju se podudara sa definicijom operatora $\hat{B}$ datom u odjeljku 3.

TEOREM 4.2. ([56, §17 teorem 2]) Operator $\hat{B}$ je zatvoren simetričan operator sa indeksom defekta (m,m) , $0 \leqslant m \leqslant 2n$. Operator $\widetilde{B}$ je hermitski adjungiran operatoru $\hat{B}$:

$$\hat{B}^* = \widetilde{B} \ . \tag{4.1}$$

DOKAZ. Na osnovu definicije operatora $\hat{B}$ vrijedi $\hat{B}^* = (\hat{B}_o)^*$ pa treba dokazati $(\hat{B}_o)^* = \widetilde{B}$. Inkluzija $\widetilde{B} \subseteq (\hat{B}_o)^*$ slijedi iz relacije (2.9) , a inkluzija $(\hat{B}_o)^* \subseteq \widetilde{B}$ je u stvari dokazana u propoziciji 3.7. Dakle vrijedi (4.1) .

Odredimo defektne brojeve operatora $\hat{B}$. Neka je λ kompleksan broj iz gornje poluravni. Označimo sa m prvi defektni broj operatora $\hat{B}$. Po definiciji m je broj linearno nezavisnih rješenja jednačine

$$(\hat{B})^* f = \lambda f ,$$

tj. jednačine

$$\tilde{B} f = \lambda f . \tag{4.2}$$

Iz definicije operatora $\tilde{B}$ jednakost (4.2) je ekvivalentna sa

$$\ell(\overline{f}) = \lambda |r| \overline{f} \quad \text{gotovo svuda na } (a,b) . \tag{4.3}$$

Dakle broj m je jednak broju linearno nezavisnih rješenja jednačine (4.3) koja pripadaju $\mathbb{L}^2(a,b,|r|)$. Kao što smo vidjeli u dokazu teorema 3.5 ovaj broj ne može biti veći od $2n$. Prema tome $m \leqslant 2n$. Pošto su koeficijenti diferencijalnog izraza ℓ realni, funkcija z je rješenje jednačine (4.3) ako i samo ako je funkcija z^* rješenje jednačine $\ell(y) = \lambda^* |r| y$ na (a,b) . Pošto $z \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|)$ ako i samo ako $z^* \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|)$ defektni brojevi operatora $\hat{B}$ su jednaki. Teorem je dokazan.

PROPOZICIJA 4.3. ([56, §17.4.III]) Neka su $f,g \in \mathcal{D}(\tilde{B})$. Tada postoje granične vrijednosti

$$\lim_{x\to a} [\![\overline{f},\overline{g}]\!](x) =: [\![\overline{f},\overline{g}]\!](a) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b} [\![\overline{f},\overline{g}]\!](x) =: [\![\overline{f},\overline{g}]\!](b)$$

i vrijedi

$$(\tilde{B}f,g) = [\![\overline{f},\overline{g}]\!](b) - [\![\overline{f},\overline{g}]\!](a) + (f,\tilde{B}g) . \tag{4.4}$$

DOKAZ. Primjenom Lagrangeove jednakosti na funkcije $\overline{f}$ i $\overline{g}$ u intervalu $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ dobijamo

$$\int_\alpha^\beta \ell(\overline{f})\overline{g}^* dx = [\![\overline{f},\overline{g}]\!](\beta) - [\![\overline{f},\overline{g}]\!](\alpha) + \int_\alpha^\beta \overline{f}\ell(\overline{g})^* dx . \tag{4.5}$$

Prema definiciji operatora $\tilde{B}$ postoje funkcije $\hat{v},\hat{u} \in \mathbb{L}^2(a,b,|r|)$ takve da je $\ell(\overline{f}) = |r|\hat{u}$, $\ell(\overline{g}) = |r|\hat{v}$ g.s. na (a,b) . Ako je $\hat{u} \in u \in L^2(a,b,|r|)$ i $\hat{v} \in v \in L^2(a,b,|r|)$, onda

$$(u,g) = \int_a^b |r|\hat{u}\overline{g}^* dx = \int_a^b \ell(\overline{f})\overline{g}^* dx \tag{4.6}$$

i

$$(f,v) = \int_a^b |r|\overline{f}\hat{v}^* dx = \int_a^b \overline{f}\ell(\overline{g})^* dx . \tag{4.7}$$

Odavde slijedi da integrali u jednakosti (4.5) konvergiraju kada $\beta \to b$, pa $\lim_{x\to b} [\![\overline{f},\overline{g}]\!](x)$ postoji. Na isti način iz jednakosti (4.6) i (4.7) slijedi da integrali u (4.5) konvergiraju kada $\alpha \to a$, pa $\lim_{x\to a} [\![\overline{f},\overline{g}]\!](x)$ postoji. Ako u jednakosti (4.5) $\alpha \to a$ i

$\beta \to b$, prema (4.6) i (4.7), na osnovu definicije operatora $\widetilde{B}$ dobijamo

$$(\widetilde{B}f,g) = (u,g) = \int_a^b \ell(\overline{f})\overline{g}^* dx$$

$$= [\![\overline{f},\overline{g}]\!](b) - [\![\overline{f},\overline{g}]\!](a) + \int_a^b \overline{f}\ell(\overline{g})^* dx$$

$$= [\![\overline{f},\overline{g}]\!](b) - [\![\overline{f},\overline{g}]\!](a) + (f,v)$$

$$= [\![\overline{f},\overline{g}]\!](b) - [\![\overline{f},\overline{g}]\!](a) + (f,\widetilde{B}g) .$$

Propozicija je dokazana.

PROPOZICIJA 4.4. ([56, §17.4.IV]) Domen $\mathcal{D}(\hat{B})$ sastoji se od svih klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ za koje je

$$[\![\overline{f},\overline{g}]\!](b) - [\![\overline{f},\overline{g}]\!](a) = 0 \qquad (g \in \mathcal{D}(\widetilde{B})) . \tag{4.8}$$

DOKAZ. Propozicija slijedi iz $\hat{B} = \widetilde{B}^*$ i jednakosti (4.4).

PROPOZICIJA 4.5. ([56, §17.5.VI]) Neka je rubna tačka a intervala (a,b) regularna i neka je rubna tačka b singularna za jednačinu (2.1) . U ovom slučaju domen $\mathcal{D}(\hat{B})$ sastoji se od svih klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ za koje je

1) $\overline{f}^{[k]}(a) = 0 \quad (k = 0,1,\dots,2n-1)$,
2) $[\![\overline{f},\overline{g}]\!](b) = 0 \qquad (g \in \mathcal{D}(\widetilde{B}))$.

PROPOZICIJA 4.6. ([56, §17.5,VII]) Pod pretpostavkama propozicije 4.5 indeks defekta operatora $\hat{B}$ je (m,m) pri čemu je $n \leqslant m \leqslant 2n$.

Dokazi propozicija 4.5 i 4.6 mogu se modelirati na osnovu odgovarajućih dokaza u [56, §17.5], koristeći metod korišten u prethodnim dokazima ovog odjeljka.

PROPOZICIJA 4.7. Pretpostavimo da postoji kompaktan podinterval $\Delta = [\alpha,\beta]$ intervala (a,b) takav da je

$$r(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve} \quad x \in (a,b)\setminus\Delta.$$

Tada je $\widetilde{B} = \widetilde{B}_\Delta$, $\hat{B} = \hat{B}_0 = \hat{B}_\Delta$ i $\hat{B}$ je zatvoren hermitski operator sa indeksom defekta $(2n,2n)$.

DOKAZ. U skladu sa primjedbom 3.6 smatramo da je $L^2(\alpha,\beta,|r|)$ $\subseteq L^2(a,b,|r|)$. Pretpostavka propozicije povlači da je $L^2(\alpha,\beta,|r|)$ $= L^2(a,b,|r|)$. Zaista, za $h \in L^2(a,b,|r|)$ i $\hat{h} \in h$ vrijedi $\hat{h}|_\Delta \in \mathbb{L}^2(\alpha,\beta,|r|)$ i $r\hat{h}\chi_{(a,b)\setminus\Delta} = 0$ g.s. na (a,b) , tj. $\hat{h}\chi_{(a,b)\setminus\Delta} \in 0_{|r|} \in L^2(a,b,|r|)$. Prostori $(L^2(\alpha,\beta,|r|),(\cdot,\cdot)_\Delta)$ i $(L^2(a,b,|r|),(\cdot,\cdot))$ su jednaki kao Hilbertovi prostori. Pošto je jednačina $\ell_\Delta(y) - \lambda|r|y = 0$ regularna na $[\alpha,\beta]$ operator $\hat{B}_\Delta$ je prema teoremu 3.5 zatvoren simetričan operator sa indeksom defekt (2n,2n) u Hilbertovom prostoru $L^2(\alpha,\beta,|r|)$.

Sada ćemo dokazati

$$\mathcal{D}(\tilde{B}) = \mathcal{D}(\tilde{B}_\Delta) .$$

Za klasu ekvivalencije $h \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ i funkciju $\bar{h} \in h$, kao i u primjedbi 3.6, diferencijalni izraz ℓ_Δ ima smisla za funkciju $\bar{h}|_\Delta$ i vrijedi $\ell_\Delta(\bar{h}|_\Delta) = \ell(\bar{h})|_\Delta$. Odavde, za $\hat{g} \in \tilde{B}(h)$ slijedi

$$\ell_\Delta(\bar{h}|_\Delta) = |r|\,\hat{g}|_\Delta \quad \text{g.s. na } \Delta ,$$

i $\hat{g}|_\Delta \in \mathbb{L}^2(\alpha,\beta,|r|)$. Dakle $h \in \mathcal{D}(\tilde{B}_\Delta)$. Obrnuto, za $h \in \mathcal{D}(\tilde{B}_\Delta)$ post funkcija $\hat{h} \in h$ za koju diferencijalni izraz ℓ_Δ ima smisla na Δ i za koju vrijedi $\ell_\Delta(\hat{h}|_\Delta) = |r|\hat{g}_1$ g.s. na Δ, za neko $\hat{g}_1 \in \mathbb{L}^2(\alpha,\beta,|r$

Jednačina

$$\ell(y) = 0 \quad \text{na } (a,\alpha]$$

sa rubnim uslovima

$$y^{[k]}(\alpha) = (\hat{h}|_\Delta)^{[k]}(\alpha) \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1)$$

ima jedinstveno rješenje y_1 na $(a,\alpha]$. Analogno, jednačina

$$\ell(y) = 0 \quad \text{na } [\beta,b)$$

sa rubnim uslovima

$$y^{[k]}(\beta) = (\hat{h}|_\Delta)^{[k]}(\beta) \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1)$$

ima jedinstveno rješenje y_2 na $[\beta,b)$. Funkcija

$$\hat{h}_1(x) = \begin{cases} y_1(x) , & x \in (a,\alpha) \\ \hat{h}(x) , & x \in [\alpha,\beta] \\ y_2(x) , & x \in (\beta,b) \end{cases}$$

pripada klasi ekvivalencije h jer je $|r|(\hat{h}_1 - \hat{h})(x) = 0$ za gotovo sve $x \in (a,b)$. Diferencijalni izraz ℓ ima smisla za funkciju $\hat{h}_1$ jer su funkcije $\hat{h}_1^{[k]}$, $k = 0,1,\ldots,2n-1$ lokalno apsolutno neprekidne na (a,b). Pored toga za $\hat{g} \in \tilde{B}_\Delta(h)$ imamo

$$\ell(\hat{h}_1) = |r|\hat{g} \quad \text{g.s. na } (a,b) , \tag{4.9}$$

Zaista, obe strane jednakosti (4.9) su gotovo svuda jednake nuli na $(a,b)\setminus\Delta$, a na $[\alpha,\beta]$ po definiciji operatora $\tilde{B}_\Delta$ vrijedi

$$\ell(\hat{h}_1) = \ell_\Delta(\hat{h}|_\Delta) = |r|\hat{g} \quad \text{g.s. na } [\alpha,\beta] .$$

Dakle, $\hat{h}_1$ zadovoljava uslove (2.A i B), pa $h \in \mathcal{D}(\hat{B})$.

Neka je $h \in \mathcal{D}(\widetilde{B}) = \mathcal{D}(\widetilde{B}_\Delta)$ i neka je $\hat{g}_1 \in \widetilde{B}(h)$ i $\hat{g}_2 \in \widetilde{B}_\Delta(h)$
Tada vrijedi

$$\ell(\bar{h}) = |r|\hat{g}_1 \qquad \text{g.s. na } (a,b)$$

i

$$\ell_\Delta(\bar{h}|_\Delta) = \ell(\bar{h})|_\Delta = |r|\hat{g}_2 \qquad \text{g.s. na } \Delta .$$

Odavde je $|r|(\hat{g}_1 - \hat{g}_2) = 0$ g.s. na (a,b) i prema tome

$$\widetilde{B}(h) = \widetilde{B}_\Delta(h) \qquad (h \in \mathcal{D}(\widetilde{B}) = \mathcal{D}(\widetilde{B}_\Delta)) . \qquad (4.1$$

Takođe vrijedi

$$\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta) = \mathcal{D}(\hat{B}_o) .$$

Zaista, u primjedbi 3.6 dokazali smo da je $\mathcal{D}(\hat{B}_\Delta) \subseteq \mathcal{D}(\hat{B}_o)$. Da bi dokazali obrnutu inkluziju pokazaćemo da za $h \in \mathcal{D}(\hat{B}_o)$ vrijedi

$$\bar{h}^{[k]}(x) = 0 \qquad (x \in (a,\alpha] \cup [\beta,b) , \quad k = 0,1,\dots,2n-1) .$$

Pošto $h \in \mathcal{D}(\hat{B}_o)$ postoje $\alpha_1 \in (a,\alpha)$ i $\beta_1 \in (\beta,b)$ takvi da je $\bar{h}(x) = 0$ $(x \in (a,\alpha_1] \cup [\beta_1,b))$. Odavde slijedi da je

$$\bar{h}^{[k]}(\alpha_1) = \bar{h}^{[k]}(\beta_1) = 0 \qquad (k = 0,1,\dots,2n-1) . \qquad (4.1$$

Pošto je $(a,\alpha) \cup (\beta,b) \subseteq \mathcal{W}$ jednakost (2.5) povlači

$$\bar{h}^{[2n]}(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve} \quad x \in (a,\alpha) \cup (\beta,b) . \qquad (4.1$$

Iz teorema 2 u [56, §16] i relacija (4.11) i (4.12) slijedi

$$\bar{h}(x) = 0 \qquad (x \in (a,\alpha) \cup (\beta,b)) .$$

Zbog apsolutne neprekidnosti funkcija $\bar{h}^{[k]}$, $k = 0,1,\dots,2n-1$, odavde dobijamo

$$\bar{h}^{[k]}(x) = 0 \qquad (x \in (a,\alpha] \cup [\beta,b) , \quad k = 0,1,\dots,2n-1) .$$

Dakle $h \in \mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)$.

Iz relacije (4.10) sada slijedi

$$\hat{B}_\Delta = \hat{B}_o .$$

Pošto je operator $\hat{B}_\Delta$ zatvoren, odavde dobijamo

$$\hat{B}_\Delta = \hat{B} ,$$

pa je $\hat{B}$ zatvoren simetričan operator sa indeksom defekta $(2n,2n)$.
Propozicija je dokazana.

PRIMJEDBA 4.8. Pretpostavimo da je rubna tačka a intervala (a,b) regularna, a rubna tačka b singularna za jednačinu (2.1). Propozicija 4.7 povlači da ako je indeks defekta operatora $\hat{B}$ jednak

(m,m) za neko $0 \leqslant m < 2n$, onda za bilo koje $x \in (a,b)$ vrijedi

$$\int_x^b |r|dx > 0 .$$

Moguće je da za neke $x \in (a,b)$ vrijedi $\int_a^x |r|dx = 0$. Neka je $\alpha \in (a,b)$ takav da $\alpha \in \mathcal{W}'$ i $(a,\alpha) \subseteq \mathcal{W}$. Stavimo $\Delta := [\alpha ,b)$. Tada je

$$L^2(a,b,|r|) = L^2(\alpha,b,|r|) , \quad \widetilde{B} = \widetilde{B}_\Delta , \quad \hat{B}_\Delta = \hat{B}$$

i za bilo koje $x \in (\alpha,b)$ vrijedi

$$\int_\alpha^x |r|dx > 0 , \quad 0 < \int_x^b |r|dx \leqslant +\infty .$$

Ova razmatranja pokazuju da ako operator $\hat{B}$ ima indeks defekta (m,m) , sa $0 \leqslant m < 2r$ tada je uslov (III) iz radova [14, s.167] , [11, s.2.2.2] i [12, s.312] uvijek ispunjen.

II.5. Hermitska proširenja operatora $\hat{B}$

TEOREM 5.1. ([56, §18 teorem 1]) Potprostor $\mathcal{D}'$ prostora $L^2(a,b,|r|)$ je domen nekog hermitskog proširenja operatora $\hat{B}$ ako i samo ako zadovoljava uslove:

1) $\mathcal{D}(\hat{B}) \subseteq \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}(\widetilde{B})$,
2) za bilo koje $f,g \in \mathcal{D}'$ vrijedi

$$[\![\vec{f},\vec{g}]\!](b) - [\![\vec{f},\vec{g}]\!](a) = 0 ,$$

3) svaka klasa ekvivalencije $g \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$ koja ispunjava uslo

$$[\![\vec{f},\vec{g}]\!](b) - [\![\vec{f},\vec{g}]\!](a) = 0,$$

za svaku klasu ekvivalencije $f \in \mathcal{D}'$, pripada $\mathcal{D}'$.

DOKAZ. Očigledno je da domen hermitskog proširenja operator $\hat{B}$ mora zadovoljavati uslov 1) . Neka $\mathcal{D}'$ zadovoljava uslov 1) i označimo sa B restrikciju operatora $\widetilde{B}$ na $\mathcal{D}'$. Neka su $f,g \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$. Prema propoziciji 4.3 jednakost

$$[\![\vec{f},\vec{g}]\!](b) - [\![\vec{f},\vec{g}]\!](a) = 0$$

je ekvivalentna sa

$$(\widetilde{B}f,g) = (f,\widetilde{B}g) .$$

Dakle uslov 2) povlači da je $B \subseteq B^*$. Pošto vrijedi $B^* \subseteq \widetilde{B}$ iz uslova 3) slijedi $B^* \subseteq B$. Teorem je dokazan.

Na analogan način mogu se iskazati i dokazati svi rezultati iz knjige Naimarka [56,§§18,19] u opštijem slučaju kojim se bavi glava II ovog rada. U odjeljcima 5 i 6 ove glave mi iskazujemo neke od ovih rezultata koji su bitni za naša dalja razmatranja.

TEOREM 5.2. ([56. §18 teorem 4]) Domen $\mathcal{D}(B)$ hermitskog proširenja B operatora $\hat{B}$ sa indeksom defekta (m,m) sastoji se od klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ koje zadovoljavaju uslov

$$[\![\bar{f},\bar{w}_k]\!](b) - [\![\bar{f},\bar{w}_k]\!](a) = 0 \qquad (k = 1,\ldots,m) , \tag{5.1}$$

pri čemu su $w_1,\ldots,w_m$ klase ekvivalencije iz $\mathcal{D}(\tilde{B})$ koje su linearno nezavisne po modulu $\mathcal{D}(\hat{B})$ i zadovoljavaju

$$[\![\bar{w}_j,\bar{w}_k]\!](b) - [\![\bar{w}_j,\bar{w}_k]\!](a) = 0 \qquad (j,k = 1,\ldots,m) . \tag{5.2}$$

Obrnuto, za klase ekvivalencije $w_1,\ldots,w_m \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ koje su linearno nezavisne po modulu $\mathcal{D}(\hat{B})$ i zadovoljavaju uslov (5.2) skup svih klasa ekvivalencije iz $\mathcal{D}(\tilde{B})$ koje zadovoljavaju uslov (5.1) je domen nekog hermitskog proširenja operatora $\hat{B}$.

TEOREM 5.3. ([56, §18, teorem 5]) Pretpostavimo da je jednačina (2.1) regularna na $[a,b]$. Tada je domen $\mathcal{D}(B)$ hermitskog proširenja B operatora $\hat{B}$ određen linearno nezavisnim rubnim uslovima oblika

$$\sum_{k=1}^{2n}\alpha_{j,k}\bar{f}^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n}\beta_{j,k}\bar{f}^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,2n), \tag{5.3}$$

pri čemu je

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{j,\nu}\alpha^*_{k,2n-\nu+1} - \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{j,2n-\nu+1}\alpha^*_{k,\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\beta_{j,\nu}\beta^*_{k,2n-\nu+1} - \sum_{\nu=1}^{n}\beta_{j,2n-\nu+1}\beta^*_{k,\nu} \qquad (j,k = 1,\ldots,2n) . \tag{5.4}$$

Obrnuto, linearno nezavisni rubni uslovi (5.3) koji zadovoljavaju uslov (5.4) određuju neko hermitsko proširenje B operatora $\hat{B}$.

PROPOZICIJA 5.4. Pretpostavimo da postoji kompaktan podinterval $\Delta = [\alpha, \beta]$ intervala (a,b) takav da je

$$r(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve} \quad x \in (a,b)\setminus\Delta .$$

Tada je domen $\mathcal{D}(B)$ hermitskog proširenja B operatora $\hat{B}$ određen linearno nezavisnim rubnim uslovima oblika

$$\sum_{k=1}^{2n}\alpha_{j,k}\bar{f}^{[k-1]}(\alpha)+\sum_{k=1}^{2n}\beta_{j,k}\bar{f}^{[k-1]}(\beta)=0 \quad (j=1,\dots,2n)\,, \tag{5.5}$$

pri čemu $\alpha_{j,k}$, $\beta_{j,k}$, $j,k=1,\dots,2n$ zadovoljavaju uslov (5.4). Obrnuto linearno nezavisni rubni uslovi oblika (5.5) koji zadovoljavaju uslov (5.4) određuju hermitsko proširenje B operatora $\hat{B}$.

DOKAZ. Ova propozicija je posljedica jednakosti $\hat{B}=\hat{B}_\Delta$ iz propozicije 4.7 i teorema 5.3.

PRIMJEDBA 5.5. Neka su zadovoljene pretpostavke propozicije 5.4. Tada su hermitska proširenja operatora $\hat{B}$ karakterizirana u teoremu 5.2 i u propoziciji 5.4. U ovoj primjedbi objasnićemo vezu između ove dvije karakterizacije.

Jednakosti (5.1) i (5.2) su ekvivalentne sa

$$(\tilde{B}f,w_k)=(f,\tilde{B}w_k) \qquad (\ k=1,2,\dots,2n\ ) \tag{5.6}$$

i

$$(\tilde{B}w_j,w_k)=(w_j,\tilde{B}w_k) \qquad (\ j,k=1,\dots,2n\ )\,, \tag{5.7}$$

respektivno. Prema propoziciji 4.7 jednakosti (5.6) i (5.7) su ekvivalentne sa

$$(\tilde{B}_\Delta f,w_k)=(f,\tilde{B}_\Delta w_k) \qquad (\ k=1,\dots,2n\ )\,, \tag{5.8}$$

i

$$(\tilde{B}_\Delta w_j,w_k)=(w_j,\tilde{B}_\Delta w_k) \qquad (\ j,k=1,\dots,2n\ )\,, \tag{5.9}$$

respektivno. Lagrangeova jednakost povlači da su jednakosti (5.8) i (5.9) ekvivalentne sa

$$[\![f,\bar{w}_k]\!](\beta)-[\![f,\bar{w}_k]\!](\alpha)=0 \qquad (\ k=1,\dots,2n\ )\,, \tag{5.10}$$

i

$$[\![\bar{w}_j,\bar{w}_k]\!](\beta)-[\![\bar{w}_j,\bar{w}_k]\!](\alpha)=0 \qquad (\ j,k=1,\dots,2n)\,, \tag{5.11}$$

respektivno. Ako u (5.5) stavimo

$$\begin{aligned}\alpha_{j,k}&=\bar{w}_j^{*[2n-k]}(\alpha)\,, & \alpha_{j,n+k}&=-\bar{w}_j^{*[n-k]}(\alpha)\\ \beta_{j,k}&=-\bar{w}_j^{[2n-k]}(\beta)\,, & \beta_{j,n+k}&=\bar{w}_j^{*[n-k]}(\beta)\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$(\ j=1,\dots,2n,\quad k=1,\dots,n\ )\,,$$

onda su jednakosti (5.10) i (5.11) ekvivalentne sa (5.5) i (5.4), respektivno. Dakle relacije (5.12) daju vezu između karakterizacija hermitskih proširenja operatora $\hat{B}$ datih u teoremu 5.2 i propoziciji 5

Napomenimo da ako klase ekvivalencije w_k, $k = 1,\dots,2n$ iz $\mathcal{D}(\tilde{B})$ i brojevi $\alpha_{j,k}$, $\beta_{j,k}$, $j,k = 1,\dots,2n$ zadovoljavaju (5.12) tada su klase ekvivalencije w_k, $k = 1,\dots,2n$ linearno nezavisne po modulu $\mathcal{D}(\hat{B})$ ako i samo ako su rubni uslovi (5.5) linearno nezavisni. Zaista, pretpostavimo da su klase ekvivalencije w_j, $j = 1,\dots,2n$ linearno nezavisne po modulu $\mathcal{D}(\hat{B})$. Ako je

$$\sum_{j=1}^{2n} \xi_j \alpha_{j,k} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{2n} \xi_j \beta_{j,k} = 0 \qquad (k = 1,\dots,2n) ,$$

onda je

$$\sum_{j=1}^{2n} \xi_j^* \overline{w}_j^{[k]}(\alpha) = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{2n} \xi_j^* \overline{w}_j^{[k]}(\beta) = 0 \qquad (k = 0,1,\dots,2n-1)$$

Odavde slijedi da za klasu ekvivalencije $w = \sum_{j=1}^{2n} \xi_j^* w_j$, koja pripada $\mathcal{D}(\tilde{B})$, vrijedi $\overline{w}^{[k]}(\alpha) = \overline{w}^{[k]}(\beta) = 0$, $k = 0,1,\dots,2n-1$. Iz jednakosti (2.5) slijedi da je

$$\ell(\overline{w}) = 0 \quad \text{g.s. na} \quad (a,\alpha) \cup (\beta,b) \subseteq \mathcal{W} .$$

Teorem 2 iz [56, §16] povlači

$$\overline{w}(x) = 0 \qquad (x \in (a,\alpha] \cup [\beta,b)) ,$$

i zbog toga $w \in \mathcal{D}(\hat{B})$. Odavde slijedi $\xi_j^* = 0$, tj. $\xi_j = 0$, $j = 1,\dots,2n$. Dakle rubni uslovi (5.5) su linearno nezavisni. Obrnuto, ako su rubni uslovi (5.5) linearno nezavisni i ako je

$w = \sum_{j=1}^{2n} \xi_j w_j \in \mathcal{D}(\hat{B}) = \mathcal{D}(\hat{B}_\Delta)$, onda vrijedi

$$\overline{w}^{[k]}(\alpha) = \sum_{j=1}^{2n} \xi_j \overline{w}_j^{[k]}(\alpha) = 0 , \quad \overline{w}^{[k]}(\beta) = \sum_{j=1}^{2n} \xi_j \overline{w}_j^{[k]}(\beta) = 0 , (k=0,1,\dots,2n-1)$$

Prema (5.12) ovo znači da vrijede relacije

$$\sum_{j=1}^{2n} \xi_j^* \alpha_{j,k} = \sum_{j=1}^{2n} \xi_j^* \beta_{j,k} = 0 \qquad (k = 1,\dots,2n) .$$

Zbog toga je $\xi_j = 0$, $j = 1,\dots,2n$. Dakle w_j, $j = 1,\dots,2n$ su linearno nezavisni po modulu $\mathcal{D}(\hat{B})$.

II.6. Rezolvente i spektar hermitskih proširenja operatora $\hat{B}$

TEOREM 6.1. ([56, §19.2 i 3]) Rezolventa $R(\lambda,B) := (B-\lambda I)^{-1}$ ($\lambda \in \varrho(B)$) bilo kog hermitskog proširenja B operatora $\hat{B}$ je integralni operator sa jezgrom $G(\cdot,\cdot,\lambda)$, tj. za klasu ekvivalencije $f \in L^2(a,b,|r|)$ i funkciju $\hat{f} \in f$ vrijedi

$$\int_a^b G(\cdot,s,\lambda)\hat{f}(s)|r(s)|\,ds \in R(\lambda,B)f \,.$$

Jezgro $G(\cdot,\cdot,\lambda)$ zadovoljava uslove

$$\int_a^b |G(x,s,\lambda)|^2 |r(s)|\,ds < +\infty \,, \qquad \int_a^b |G(x,s,\lambda)|^2 |r(x)|\,dx < +\infty \,.$$

Ako operator $\hat{B}$ ima indeks defekta $(2n,2n)$ jezgro $G(\cdot,\cdot,\lambda)$ definiše Hilbert-Schmidtov operator u prostoru $L^2(a,b,|r|)$, tj. vrijedi

$$\int_a^b\int_a^b |G(x,s,\lambda)|^2 |r(x)|\,|r(s)|\,dx ds < +\infty \,.$$

PRIMJEDBA 6.2. Ako je indeks defekta operatora $\hat{B}$ jednak $(2n,2n)$, onda je, prema teoremu 6.1, rezolventa bilo kog hermitskog proširenja B operatora $\hat{B}$ kompaktan operator, pa operator B ima diskretan spektar. U regularnom slučaju jezgro $G(\cdot,\cdot,\lambda)$ možemo odabrati tako da su funkcije

$$G_{jk}(x,s,\lambda) = \frac{\partial^{j+k} G(x,s,\lambda)}{\partial x^j \partial s^k} \qquad (\, x,s \in [a,b] \;,\; j,k = 0,1,\ldots,n-1 \,)$$

neprekidne na $[a,b] \times [a,b]$.

Kao što je ranije napomenuto teorem 6.1 može se dokazati modelirajući dokaz iz [56, §19.2 i 3] .

TEOREM 6.3 (viditi [37, dio II, §4, 7^o, 8^o] , [56, §19, teorem 5] Pretpostavimo da je $p_o > 0$ na $[a,b]$ i da je jednačina (2.1) regularna na $[a,b]$. Tada je operator $\hat{B}$ ograničen odozdo. Svako hermitsko proširenje operatora $\hat{B}$ je ograničeno odozdo i ima diskretan spektar.

DOKAZ. Da bi dokazali prvu izjavu teorema dovoljno je dokazati da je jedno hermitsko proširenje operatora $\hat{B}$ ograničeno odozdo. Označimo sa B hermitsko proširenje operatora $\hat{B}$ određeno rubnim uslovima (vidi teorem 5.3) oblika (5.3), pri čemu je

$$\beta_{n+j,k} = \alpha_{j,k} = \begin{cases} 1 & j = k, \quad j = 1,\ldots,n \\ 0 & j \neq k, \quad j,k = 1,\ldots,n \end{cases}$$

i $\alpha_{j,k} = 0$ za $j>n$ ili $k>n$, $\beta_{j,k} = 0$ za $j \leqslant n$ ili $k>n$. Očigledno je da ovakvi rubni uslovi zadovoljavaju uslov (5.4). Za klasu ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(B)$ vrijedi

$$\bar{f}^{[k]}(a) = \bar{f}^{[k]}(b) = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,n-1).$$

Parcijalna integracija (vidi (1.4)) daje

$$(Bf,f) = (\ell(\bar{f}),\bar{f})_1 = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x)|\bar{f}^{(n-k)}(x)|^2 dx . \tag{6.1}$$

Koristeći relaciju (6.1) na isti način kao i u specijalnom slučaju kada je $r(x) = 1$ ($x \in [a,b]$) (viditi[56, str. 232]) konstruiše se potprostor $\hat{\mathcal{D}}$ domena $\mathcal{D}(B)$ za koji je

$$(Bf,f) \geqslant 0 \quad (f \in \hat{\mathcal{D}})$$

i $\dim \mathcal{D}(B)/\hat{\mathcal{D}} < +\infty$. Odavde slijedi da se negativni spektar operatora B sastoji od konačno mnogo svojstvenih vrijednosti konačne višestrukosti. Ovo je posljedica nejednakosti

$$\dim F(-\infty,0)L^2(a,b,|r|) \leqslant \dim \mathcal{D}(B)/\hat{\mathcal{D}} ,$$

pri čemu F označava spektralnu funkciju operatora B . Dakle operator B , a prema tome i operator $\hat{B}$, je ograničen odozdo. Operator B ima diskretan spektar. Zaista, vidjeli smo da je negativni dio spektra operatora B diskretan. Analognim razmatranjima može se dokazati da operator $B + aI$, za bilo koje $a \in \mathbb{R}$, ima diskretan negativni dio spektra. Zbog toga operator B ima diskretan spektar. Pošto operator $\hat{B}$ ima indeks defekta $(2n,2n)$ odavde slijedi druga tvrdnja teorema.

Pokazuje se da je, u slučaju kada $a,b \in \mathcal{W}'$, operator B definisan u prethodnom dokazu posebno hermitsko proširenje operatora $\hat{B}$, naime ovo je Friedrichsovo proširenje operatora $\hat{B}$. Ovo će biti objašnjeno u slijedećem odjeljku.

II.7. Skup $\mathcal{D}[\hat{B}]$ i Friedrichsovo proširenje operatora $\hat{B}$. Glavni rubni uslovi

U ovom odjeljku poopštavamo neke rezultate iz rada Kreina [37, dio II, §§ 6,7] gdje je razmatran specijalan slučaj $r(x) = 1$ ($x \in [a,b]$) regularnog problema (2.1). Ovdje pretpostavljamo da je $p_0(x) > 0$ za gotovo sve $x \in [a,b]$ i da je jednačina (2.1) regularna na intervalu $[a,b]$. Prema teoremu 6.3 zatvoren simetričan operator $\hat{B}$ je ograničen odozdo u Hilbertovom prostoru $L^2(a,b,|r|)$.

Podsjetimo se, vidi [37, dio I, §4], da je za ograničen odozdo operator $\hat{B}$ skup $\mathcal{D}[\hat{B}]$ definisan kao skup svih klasa ekvivalencije $f \in L^2(a,b,|r|)$ za koje postoji niz $(f_\nu) \subseteq \mathcal{D}(\hat{B})$ takav da

1) $(f_\nu - f, f_\nu - f) \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow +\infty)$

2) $(\hat{B}(f_\nu - f_\mu), f_\nu - f_\mu) \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty)$.

Skalarni produkt u Hilbertovom prostoru $L^2(a,b,p_0)$ označavaćemo sa $(\cdot,\cdot)'$ i odgovarajuću normu sa $\|\cdot\|'$.

LEMA 7.1. ([37, dio II, str.381]) Neka je $(y_\nu)_{\nu=1}^{+\infty}$ niz funkcija takvih da su $y_\nu, y'_\nu, \ldots, y_\nu^{(n-1)}$, $\nu = 1,2,\ldots$ apsolutno neprekidne funkcije na $[a,b]$ i $y_\nu^{(n)} \in L^2(a,b,p_0)$, $\nu = 1,2,\ldots$. Pretpostavimo da je $(y_\nu^{(n)})_{\nu=1}^{+\infty}$ Cauchyjev niz u $L^2(a,b,p_0)$. Tada postoji funkcija y takva da su funkcije $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ apsolutno neprekidne na $[a,b]$, niz $(y_\nu^{(k)})_{\nu=1}^{+\infty}$ konvergira uniformno na $[a,b]$ ka funkciji $y^{(k)}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $y^{(n)} \in L^2(a,b,p_0)$ i $\|y_\nu^{(n)} - y^{(n)}\|' \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow +\infty)$.

DOKAZ ove leme dat je u [37, dio II, str. 381,382].

Neka je $\mathcal{W}$ otvoren skup definisan u odjeljku 2 i neka je $\{I_m\}_{m=1}^{+\infty}$ familija otvorenih podintervala intervala $[a,b]$ takvih da je $I_m = (a_m,b_m)$, $I_m \cap I_{m'} = \emptyset$ $(m \neq m',\ m,m' = 1,2,\ldots)$ i $\mathcal{W} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m$.

Označimo sa $\mathcal{N}$ skup svih funkcija $y^{(n)} \in L^2(a,b,p_0)$ za koje je $y \in 0_{|r|} \in L^2(a,b,|r|)$, funkcije $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ su apsolutno neprekidne na $[a,b]$ i diferencijalni izraz ℓ_{I_m}, definisan na zatvorenom intervalu $[a_m,b_m]$ sa istim koeficijentima kao i ℓ, ima smisla za funkciju $y|_{I_m}$ i vrijedi $\ell_{I_m}(y|_{I_m}) = 0$.

LEMA 7.2. Skup $\mathcal{N}$ je zatvoren potprostor Hilbertovog prostora $L^2(a,b,p_0)$.

DOKAZ. Neka je $(y_\nu^{(n)})_{\nu=1}^{+\infty}$ niz elemenata iz $\mathcal{N}$ takav da $\|y_\nu^{(n)} - g\|' \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow +\infty)$ za neko $g \in L^2(a,b,p_0)$. Na osnovu leme 7.1 slijedi da postoji funkcija y za koju je $y^{(n)} = g$ i niz $(y_\nu^{(k)})_{\nu=1}^{+\infty}$ konvergira uniformno na $[a,b]$ ka apsolutno neprekidnoj funkciji $y^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$. Odavde slijedi da $r(x)y_\nu(x) \longrightarrow r(x)y(x)$ $(\nu \longrightarrow +\infty)$ za gotovo sve $x \in [a,b]$. Budući da je $y_\nu \in O_{|r|}$, $\nu = 1,2,\dots$, imamo $r(x)y(x) = 0$ za gotovo sve $x \in [a,b]$, tj. $y \in O_{|r|}$. Ostaje da se provjeri da diferencijalni izraz ℓ_{I_m} ima smisla za funkciju $y|_{I_m}$ i da $\ell_{I_m}(y|_{I_m}) = 0$, $m = 1,2,\dots$. Da bi to pokazali uzmimo bilo koji $m \in \{1,2,\dots\}$ i stavimo

$$\mathcal{A}_m = \left\{y^{(n)}: \quad y: I_m \longrightarrow \mathbb{C} \text{ , } \ell_{I_m}(y) = 0\right\}.$$

Skup $\mathcal{A}_m$ je konačno dimenzionalan, pa i zatvoren potprostor prostora $L^2(I_m,p_o)$. Imamo da $(y_\nu|_{I_m})^{(n)} \in \mathcal{A}_m$, $\nu = 1,2,\dots$ i da niz $((y_\nu|_{I_m})^{(n)})_{\nu=1}^{+\infty}$ konvergira ka $(y|_{I_m})^{(n)}$ po normi prostora $L^2(I_m,p_o)$ Zaključujemo da $(y|_{I_m})^{(n)} \in \mathcal{A}_m$, tj. $\ell_{I_m}(y|_{I_m}) = 0$. Lema je dokazana.

Označimo sa $\mathcal{L}$ skup svih klasa ekvivalencije $f \in L^2(a,b,|r|)$ za koje postoji funkcija $\hat{f} \in f$ sa slijedečim osobinama:

(7.A) izvodi $\hat{f}^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$ postoje i oni su apsolutno neprekidne funkcije na intervalu $[a,b]$;

(7.B) $\int_a^b |\hat{f}^{(n)}(x)|^2 p_o(x)dx < +\infty$;

(7.C) za svako $m = 1,2,\dots$ diferencijalni izraz ℓ_{I_m} ima smisla za funkciju $\hat{f}|_{I_m}$ i vrijedi $\ell_{I_m}(\hat{f}|_{I_m}) = 0$;

(7.D) funkcija $\hat{f}^{(n)}$ je ortogonalna na $\mathcal{N}$ u prostoru $L^2(a,b,p_o)$.

PRIMJEDBA 7.3. Neka za klasu ekvivalencije $f \in L^2(a,b,|r|)$ postoji funkcija $\tilde{f} \in f$ sa osobinama (7.A,B i C) . Označimo sa $\mathcal{N}_f$ skup svih funkcija $y^{(n)}$ za koje je $y \in f$ i y ima osobine (7.A,B i C) . Tada je $\mathcal{N}_f \neq \emptyset$ i $\mathcal{N}_f = \tilde{f}^{(n)} + \mathcal{N}$. Budući da je $\mathcal{N}$ zatvoren potprostor u $L^2(a,b,p_o)$ vrijedi jednakost $\tilde{f}^{(n)} = g + h^{(n)}$ pri čemu je funkcija g ortogonalna na $\mathcal{N}$ u $L^2(a,b,p_o)$ i $h^{(n)} \in \mathcal{N}$. Tada je

$$\mathcal{N}_f = g + h^{(n)} + \mathcal{N} = g + \mathcal{N} ,$$

pa je $g \in \mathcal{N}_f$. Dakle postoji funkcija $\hat{f} \in f$ sa osobinama (7.A,B i C i za koju je $\hat{f}^{(n)} = g$. Funkcija $\hat{f}$ ima osobinu (7.D) . Dakle $f \in \mathcal{L}$

PRIMJEDBA 7.4. Neka je m bilo koji pozitivan cio broj, $I_m = (a_m, b_m)$ i neka je $y_{m,1}, \dots, y_{m,2n}$ fundamentalni sistem rješenja homogene jednačine

$$\ell_{I_m}(y) = 0 \tag{7.1}$$

takav da je

$$y_{m,k}^{[j-1]}(a_m) = \delta_{j,k} \quad (j,k = 1,\dots,2n) . \tag{7.2}$$

Tada je funkcija u_m rješenje jednačine (7.1) ako i samo ako postoje $\xi_{m,1}, \dots, \xi_{m,2n} \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^{2n} \xi_{m,k} y_{m,k}(x) \qquad (x \in [a_m, b_m]) . \tag{7.3}$$

S obzirom na (7.2), iz relacije (7.3) slijedi $\xi_{m,k} = u_m^{[k-1]}(a_m)$, $k = 1,\dots,2n$. Zbog toga je

$$\sum_{k=1}^{2n} u_m^{[k-1]}(a_m) y_{m,k}^{[j-1]}(b_m) - u_m^{[j-1]}(b_m) = 0 \quad (j = 1,\dots,2n). \tag{7.4}$$

Ako funkcija u_m zadovoljava uslove (7.4), onda je funkcija

$$v_m(x) = \sum_{k=1}^{2n} u_m^{[k-1]}(a_m) y_{m,k}(x)$$

rješenje jednačine (7.1) i vrijedi

$$v_m^{[j-1]}(a_m) = u_m^{[j-1]}(a_m) , \; v_m^{[j-1]}(b_m) = u_m^{[j-1]}(b_m) \; (j=1,\dots,2n)$$

Uslovi (7.4) imaju isti oblik kao rubni uslovi (5.3) (ali ovi uslovi ne zadovoljavaju obavezno uslove (5.4)) ako stavimo

$$\alpha_{j,k} = y_{m,k}^{[j-1]}(b_m) , \quad \beta_{j,k} = -\delta_{j,k} \qquad (j,k = 1,\dots,2n) .$$

Podsjetimo se da je Krein [37, dio II, str. 386] definisao glavne rubne uslove na slijedeći način. Rubni uslov

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \bar{f}^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_k \bar{f}^{[k-1]}(b) = 0$$

naziva se <u>glavnim rubnim uslovom</u> koji je određen sistemom rubnih uslova (5.3) ako svaka funkcija koja zadovoljava rubne uslove (5.3) zadovoljava i ovaj rubni uslov i ako je

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \quad \text{za} \quad n < k \leqslant 2n .$$

Neka je

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_{j,k}^{(m)}w^{[k-1]}(a_m)+\sum_{k=1}^{m}\zeta_{j,k}^{(m)}w^{[k-1]}(b_m)=0\quad(j=1,\dots,d)\tag{7.5}$$

maksimalan sistem linearno nezavisnih glavnih rubnih uslova koji su određeni rubnim uslovima (7.4) (ovakav sistem glavnih rubnih uslova u [37, dio II, str. 386] naziva se potpunim). Očigledno je da za funkciju w koja ima izvode do $(n-1)$-og reda, uključivo, i koja zadovoljava glavne rubne uslove (7.5) postoji funkcija w_1 za koju diferencijalni izraz ℓ_{I_m} ima smisla, koja zadovoljava rubne uslove (7.4) i za koju vrijedi

$$w^{[k-1]}(a_m)=w_1^{[k-1]}(a_m),\ w^{[k-1]}(b_m)=w_1^{[k-1]}(b_m)\quad(k=1,\dots,n)$$

Kao što smo već ranije napomenuli, odavde slijedi da postoji funkcija v koja je rješenje jednačine (7.1) i za koju vrijedi

$$w^{[k-1]}(a_m)=v^{[k-1]}(a_m),\ w^{[k-1]}(b_m)=v^{[k-1]}(b_m)\quad(k=1,\dots,n)$$

PROPOZICIJA 7.5. Vrijedi inkluzija $\mathcal{D}(\tilde{B})\subseteq\mathcal{L}$. Za klasu ekvivalencije $f\in\mathcal{L}$ postoji jedinstvena funkcija $\hat{f}\in f$ koja ima osobine (7.A,B,C i D). Funkcija $\hat{0}_{|r|}$ je nula funkcija.

DOKAZ. Za klasu ekvivalencije $f\in\mathcal{D}(\tilde{B})$ funkcija $\bar{f}\in f$ ima osobinu (7.A) i funkcija $p_o\bar{f}^{(n)}$ je apsolutno neprekidna na intervalu $[a,b]$. Funkcija $p_o^2|\bar{f}^{(n)}|^2$ je takođe apsolutno neprekidna na $[a,b]$, pa i ograničena na $[a,b]$. Pošto $1/p_o\in L^1(a,b)$, odavde slijedi da je $\int_a^b|\bar{f}^{(n)}(x)|^2p_o(x)dx<+\infty$, tj. funkcija $\bar{f}$ ima osobinu (7.B). Na osnovu jednakosti (2.5) očigledno je da funkcija $\bar{f}$ ima osobinu (7.C). Prema primjedbi 7.3 odavde slijedi da $f\in\mathcal{L}$.

Neka funkcija $y\in O_{|r|}$ ima osobine (7.A,B i C) i neka je $y^{(n)}$ ortogonalno na potprostor $\mathcal{N}$ u $L^2(a,b,p_o)$. Pošto $y^{(n)}\in\mathcal{N}$, dobijamo da vrijedi $\int_a^b|y^{(n)}(x)|^2p_o(x)dx=0$. Zbog toga je

$$y^{(n)}(x)=0\ \text{ za gotovo sve }\ x\in[a,b]\,.\tag{7.6}$$

Koristeći apsolutnu neprekidnost funkcija $y,y',\dots,y^{(n-1)}$, na sličan način kao u lemi 2.1, može se pokazati da je

$$y^{(k)}(x)=0\qquad(x\in\mathcal{W}',\ k=0,1,\dots,n-1)\,.\tag{7.7}$$

Teorem jedinstvenosti za obične diferencijalne jednačine i relacije

(7.6) i (7.7) povlače da je $y(x) = 0$ ($x \in [a,b]$) . Dakle $\hat{0}_{|r|}$ je nula funkcija.

Neka funkcije $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in f \in \mathscr{L}$ imaju osobine (7.A,B,C i D) . Tada $\hat{f}_1 - \hat{f}_2 \in 0_{|r|}$ i funkcija $\hat{f}_1 - \hat{f}_2$ ima osobine (7.A,B,C i D) . Prema onome što smo upravo dokazali imamo $(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(x) = 0$ ($x \in [a,b]$) , tj. $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$. Propozicija je dokazana.

Nadalje, za klasu ekvivalencije $f \in \mathscr{L}$ jednoznačno određenu funkciju iz f koja ima osobine (7.A,B,C i D) označavaćemo sa $\hat{f}$. Preslikavanje $f \longmapsto \hat{f}$ $(f \in \mathscr{L})$ je linearno.

Za klasu ekvivalencije $f \in \mathscr{D}(\hat{B})$ je

$$\sum_{j=0}^{n} \int_a^b p_j |\overline{f}^{(n-j)}|^2 \, dx = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b p_j |\hat{f}^{(n-j)}|^2 dx \,. \tag{7.8}$$

Zaista, vrijedi

$$(\hat{B}f,f) = (\ell(\overline{f}),\overline{f})_1 = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b p_j |\overline{f}^{(n-j)}|^2 dx \,, \tag{7.9}$$

i

$$(\hat{B}f,f) = (\ell(\overline{f}),\hat{f})_1 = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b p_j \overline{f}^{(n-j)} \hat{f}^{*(n-j)} dx \,. \tag{7.10}$$

Funkcija $(\hat{f} - \overline{f})^{(n)}$ pripada skupu $\mathcal{N}$, funkcije $(\hat{f} - \overline{f})^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$ uzimaju vrijednost nula na skupu $\mathcal{W}'$ i funkcija $(\hat{f} - \overline{f})^{(n)}$ uzima vrijednost nula gotovo svuda na skupu $\mathcal{W}'$. Zbog toga, koristeći (1.5), dobijamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} \int_a^b p_j (\hat{f} - \overline{f})^{(n-j)} \hat{f}^{*(n-j)} dx \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} \int_{I_m} p_j (\hat{f} - \overline{f})^{(n-j)} \hat{f}^{*(n-j)} dx \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} \Big[(\hat{f} - \overline{f})^{(n-j)} \hat{f}^{\,[2n-j]} \Big]_{a_m}^{b_m} = 0 \,.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\sum_{j=0}^{n} \int_a^b p_j |\hat{f}^{(n-j)}|^2 dx = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b p_j \overline{f}^{(n-j)} \hat{f}^{*(n-j)} dx \,. \tag{7.11}$$

Iz jednakosti (7.9,10 i 11) slijedi jednakost (7.8).

PROPOZICIJA 7.6. Vektorski prostor

$$\mathscr{L}_0 = \left\{ f \in \mathscr{L} : \hat{f}^{(k)}(a) = \hat{f}^{(k)}(b) = 0 \,, \quad k = 0,1,\dots,n-1 \right\}$$

sa skalarnim produktom

$$(f,g)_0 := \int_a^b \hat{f}^{(n)}(x)\hat{g}^{*(n)}(x)p_0(x)dx \qquad (f,g\in \mathcal{L}_0)$$

je Hilbertov prostor. Vrijedi $\mathcal{D}(\hat{B})\subseteq \mathcal{L}_0$.

DOKAZ. Ako za neku klasu ekvivalencije $f\in\mathcal{L}_0$ vrijedi $(f,f)_0 = 0$, onda je $\hat{f}^{(n)}(x) = 0$ za gotovo sve $x\in[a,b]$. Teorem jedinstvenosti za obične diferencijalne jednačine i $\hat{f}^{(k)}(a) = 0$, $k = 0,1,\dots,n-1$ povlače $\hat{f}(x) = 0$ ($x\in[a,b]$) . Dakle $f = 0_{|r|}$. Lako se provjerava da je $(\cdot,\cdot)_0$ skalarni produkt na $\mathcal{L}_0$.

Sada ćemo dokazati da je prostor $(\mathcal{L}_0,(\cdot,\cdot)_0)$ kompletan. Neka je $(f_\nu)_{\nu=1}^{+\infty}$ Cauchyjev niz u prostoru $(\mathcal{L}_0,(\cdot,\cdot)_0)$. Tada niz funkcija $(\hat{f}_\nu)_{\nu=1}^{+\infty}$ zadovoljava uslove leme 7.1, pa postoji funkcija y takva da su funkcije $y,y',\dots,y^{(n-1)}$ apsolutno neprekidne na $[a,b]$; niz $(\hat{f}_\nu^{(k)})_{\nu=1}^{+\infty}$ konvergira uniformno na $[a,b]$ ka funkciji $y^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $y^{(n)}\in L^2(a,b,p_0)$ i

$$\|\hat{f}_\nu^{(n)} - y^{(n)}\|' \longrightarrow 0 \qquad (\nu \longrightarrow +\infty) . \tag{7.12}$$

Funkcija y ima osobine (7.A i B) . Pošto je $\hat{f}_\nu^{(n)}$ ortogonalan na $\mathcal{N}$ u $L^2(a,b,p_0)$, relacija (7.12) povlači da je $y^{(n)}$ ortogonalno na $\mathcal{N}$ u $L^2(a,b,p_0)$, tj. funkcija y ima osobinu (7.D). Iz relacije (7.12) slijedi

$$\int_{I_m}|\hat{f}_\nu^{(n)} - y^{(n)}|^2 p_0 dx \longrightarrow 0 \qquad (\nu \longrightarrow +\infty,\ m = 1,2,\dots) .$$

Pošto funkcije $\hat{f}_\nu$, $\nu = 1,2,\dots$ imaju osobinu (7.C), na isti način kao i u lemi 7.2 zaključujemo da funkcija y ima osobinu (7.C). Neka je $f\in L^2(a,b,|r|)$ takvo da $y\in f$. Tada je $f\in\mathcal{L}$ i $y = \hat{f}$. Budući da niz $(\hat{f}_\nu^{(k)})_{\nu=1}^{+\infty}$ konvergira uniformno na $[a,b]$ ka funkciji $\hat{f}^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$, imamo $\hat{f}^{(k)}(a) = \hat{f}^{(k)}(b) = 0$, $k = 0,1,\dots,n-$ tj. $f\in\mathcal{L}_0$. Relacija (7.12) povlači da $f_\nu \longrightarrow f$ $(\nu \longrightarrow +\infty)$ po normi prostora $(\mathcal{L}_0,(\cdot,\cdot)_0)$. Tako je dokazana kompletnost prostora $(\mathcal{L}_0,(\cdot,\cdot)_0)$. Dakle $(\mathcal{L}_0,(\cdot,\cdot)_0)$ je Hilbertov prostor.

Prema propoziciji 7.5 imamo $\mathcal{D}(\hat{B})\subseteq\mathcal{L}$. Neka je $f\in\mathcal{D}(\hat{B})$. Na sličan način kao i u lemi 2.1 može se pokazati da $\hat{f}^{(k)}(x) - \overline{f}^{(k)}(x) = 0$. ($x\in\mathcal{W}'$, $k = 0,1,\dots,n-1$) . Ako rubna tačka a pripada $\mathcal{W}$, onda je $\hat{f}^{(k)}(a) = \overline{f}^{(k)}(a) = 0$, $k=0,1,\dots,n-1$ Neka $a\notin\mathcal{W}'$ i neka je $d\in\mathcal{W}'$ takav da $[a,d)\subseteq\mathcal{W}$. Pošto vrijedi

$\ell_{[a,d]}(\overline{f}|_{[a,d]}) = 0$ i $\overline{f}^{[k]}(a) = 0$, $k = 0,1,\dots,2n-1$, prema [56, §16, teorem 2] slijedi $\overline{f}(x) = 0$ ($x \in [a,d]$) i, odatle, $\overline{f}^{[k]}(d) = 0$, $k = 0,1,\dots,2n-1$. Odavde, zbog $d \in \mathcal{W}'$, dobijamo

$$\hat{f}^{(k)}(d) = \overline{f}^{[k]}(d) = 0 \quad (k = 0,1,\dots,n-1) . \tag{7.13}$$

Na osnovu ove jednakosti, funkcija

$$y(x) = \begin{cases} \hat{f}(x) , & x \in [a,d] \\ 0 , & x \in [d,b] \end{cases}$$

pripada skupu $\mathcal{N}$. Iz uslova (7.D) slijedi $\int_a^d |\hat{f}^{(n)}|^2 p_o dx = 0$ i, prema tome,

$$\hat{f}^{(n)}(x) = 0 \quad \text{za gotovo sve } x \in [a,d] . \tag{7.14}$$

Relacije (7.14) i (7.13) povlače da je

$$\hat{f}(x) = 0 \quad (x \in [a,d]) .$$

i, zbog toga $\hat{f}^{(k)}(a) = 0$, $k = 0,1,\dots,n-1$. Na isti način dokazuje se da vrijede i $\hat{f}^{(k)}(b) = 0$, $k = 0,1,\dots,n-1$. Dakle $f \in \mathcal{L}_o$. Propozicija je dokazana.

Označimo sa $\mathcal{L}'_o$ skup svih klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{L}_o$ za koje je

$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = f^{(k)}(a_m) = f^{(k)}(b_m) = 0 \quad (k=0,1,\dots,n-1 , \; m=1,2,\dots) . \tag{7.15}$$

Skup svih klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\hat{B})$ za koje vrijede relacije (7.15) označimo sa $\hat{\mathcal{D}}'$.

LEMA 7.7. Skup $\mathcal{L}'_o$ je zatvoren potprostor Hilbertovog prostora $(\mathcal{L}_o,(\cdot,\cdot)_o)$ i $\mathcal{L}'_o$ je zatvorenje skupa $\hat{\mathcal{D}}'$ u $(\mathcal{L}_o,(\cdot,\cdot)_o$

DOKAZ. Prva izjava leme je posljedica leme 7.1 i definicije norme u prostoru $\mathcal{L}_o$.

Da bi dokazali da je $\hat{\mathcal{D}}'$ gust potprostor prostora $\mathcal{L}_o$ pretpostavimo da postoji $g \in \mathcal{L}_o \setminus \{0\}$ koji je ortogonalan na $\hat{\mathcal{D}}'$ u $(\mathcal{L}_o,(\cdot,\cdot)_o)$, tj.

$$\int_a^b \hat{f}^{(n)}(x)\hat{g}^{*(n)}(x)p_o(x)dx = 0 \quad (f \in \hat{\mathcal{D}}') .$$

Pošto je $\hat{f}^{(n)} - \overline{f}^{(n)} \in \mathcal{N}$ i $\hat{g}^{(n)}$ je ortogonalan na $\mathcal{N}$ u $L^2(a,b,p_o)$ iz posljednje jednakosti dobijamo

$$\int_a^b \overline{f}^{(m)}(x)\hat{g}^{*(n)}(x)p_o(x)dx = 0 \qquad (f \in \hat{\mathcal{D}}') . \tag{7.16}$$

Lako se provjerava da za bilo koju klasu ekvivalencije $h \in \mathcal{L}'_o$ vrijedi $\hat{h}^{(n)}(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W})$, pa zbog (7.15) imamo $\hat{h}(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W})$. Odatle $\hat{h}^{(k)}(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W}, k = 0,1,\dots,n-1)$. Pošto su funkcije $\hat{h}^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$ apsolutno neprekidne na $[a,b]$ imamo

$$\hat{h}^{(k)}(x) = 0 \qquad (x \in Cl(\mathcal{W}) , k = 0,1,\dots,n-1) , \tag{7.17}$$

pri čemu $Cl(\mathcal{W})$ označava zatvorenje skupa $\mathcal{W}$. Neka je $\Delta' = (a',b')$ bilo koji otvoren interval za koji je $\Delta' \subseteq Int(\mathcal{W}')$ i $a',b' \notin Int(\mathcal{W}')$ pri čemu $Int(\mathcal{W}')$ označava unutrašnjost skupa $\mathcal{W}'$. Označimo sa $\mathcal{E}$ skup svih klasa ekvivalencije f iz $\mathcal{D}(\hat{B})$ za koje je $\overline{f}\chi_{[a,b]\setminus\Delta'} = 0$ na $[a,b]$. Iz (7.16) slijedi

$$\int_{\Delta'} \overline{f}^{(n)}(x)\hat{g}^{*(n)}(x)p_o(x)dx = 0 \qquad (f \in \mathcal{E}) . \tag{7.18}$$

Budući da, prema (7.17), imamo

$$\hat{g}^{(k)}(a') = \hat{g}^{(k)}(b') = 0 \qquad (k = 0,1,\dots,n-1)$$

relacija (7.18) je upravo relacija (6.4) iz rada [37, dio II, str.382] (pri čemu je interval $[a,b]$ iz [37] zamijenjen ovdje sa intervalom $[a',b']$). Provodeći ista razmatranja kao u [37] dobijamo $\hat{g}(x) = 0$ $(x \in [a',b'])$. S obzirom na izbor intervala Δ' zaključujemo da je

$$\hat{g}(x) = 0 \qquad (x \in Int(\mathcal{W}')) .$$

Posljednja jednakost i (7.17) daju $\hat{g}(x) = 0$ $(x \in [a,b])$, tj. $g = 0_{|r|}$. Kontradikcija! Lema je dokazana.

PRIMJEDBA 7.8. U dokazu leme 7.7 primijetili smo da za bilo koje $h \in \mathcal{L}_o$ vrijedi $\hat{h}(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W})$. Odavde slijedi da ako $f,g \in \mathcal{L}_o$ i $\hat{f}^{(k)}(a_m) = \hat{g}^{(k)}(a_m)$, $\hat{f}^{(k)}(b_m) = \hat{g}^{(k)}(b_m)$ $(k=0,1,\dots,n-1, m=1,2,\dots)$, onda $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ $(x \in \mathcal{W})$.

Nadalje u ovom odjeljku pretpostavljamo da je otvoren skup $\mathcal{W}$ unija konačno mnogo međusobno disjunktnih otvorenih intervala, tj. za neki prirodan broj s vrijedi

$$\mathcal{W} = \bigcup_{m=1}^{s} I_m , \quad I_m = (a_m,b_m), \ m = 1,\dots,s , \quad a \leq a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_s < b_s \leq b$$

Označimo sa B_F hermitsko proširenje operatora $\hat{B}$ određeno rubnim uslovima (vidjeti propoziciju 5.4) oblika (5.5) pri čemu je

$$\beta_{n+j,k} = \bar{\alpha}_{j,k} = \delta_{jk} , \qquad j,k = 1,\dots,n$$

$$\alpha_{j,k} = 0 \quad \text{za} \quad j>n \quad \text{ili} \quad k>n , \qquad \beta_{j,k} = 0 \quad \text{za} \quad j \leqslant n \quad \text{ili} \quad k>n$$

Očigledno je da ovakvi rubni uslovi zadovoljavaju uslove (5.4). Imamo da klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ pripada domenu $\mathcal{D}(B_F)$ ako i samo ako

$$\bar{f}^{(k)}(\alpha) = \bar{f}^{(k)}(\beta) = 0 \qquad (k = 0,1,\dots,n-1) .$$

TEOREM 7.11. ([37, dio II, 9°]) Vrijedi jednakost $\mathcal{D}[\hat{B}] = \mathcal{L}_0$. Upravo definisani operator B_F je Friedrichsovo proširenje operatora $\hat{B}$.

DOKAZ. Budući da je skup $\mathcal{D}(\hat{B})$ gust u $(\mathcal{L}_0,(\cdot,\cdot)_0)$ za bilo koji $f \in \mathcal{L}_0$ postoji niz $(f_\nu)_{\nu=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{D}(\hat{B})$ takav da vrijedi

$$(f - f_\nu, f - f_\nu)_0 = \int_a^b p_0(x) |\hat{f}^{(n)}(x) - \hat{f}_\nu^{(n)}(x)|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow +\infty)$$

Niz $(\hat{f}_\nu)_{\nu=1}^{+\infty}$ zadovoljava uslove leme 7.1, pa niz $(\hat{f}_\nu^{(k)})_{\nu=1}^{+\infty}$ konvergira uniformno na $[a,b]$ ka funkciji $\hat{f}^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$. Odavde slijedi

$$(f - f_\nu, f - f_\nu) = \int_a^b |\hat{f}(x) - \hat{f}_\nu(x)|^2 |r(x)| dx \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow +\infty) \tag{7.19}$$

i

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k |\hat{f}_\nu^{(n-k)} - \hat{f}_\mu^{(n-k)}|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty) . \tag{7.20}$$

Relacije (7.8) i (7.20) daju

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k |\bar{f}_\nu^{(n-k)} - \bar{f}_\mu^{(n-k)}|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty) . \tag{7.21}$$

Iz (7.9) i (7.21) slijedi

$$(\hat{B}(f_\nu - f_\mu), f_\nu - f_\mu) \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty) . \tag{7.22}$$

Na osnovu (7.19) i (7.22) imamo

$$\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{D}[\hat{B}] . \tag{7.23}$$

Sada ćemo dokazati inkluziju

$$\mathcal{D}[B_F] \subseteq \mathcal{L}_0 . \tag{7.24}$$

Pošto vrijedi $\mathcal{D}[B_F] = \mathcal{D}[B_F + cI]$ ($c \in \mathbb{R}$) i pošto je operator B_F prema teoremu 6.3 ograničen odozdo možemo pretpostaviti da je operator B_F striktno pozitivan, tj. za neko $\gamma > 0$ je $B_F \geqslant \gamma$. Prema lemi 4 iz [37, dio I] za bilo koje $f \in \mathcal{D}[B_F]$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j |(f,\varphi_j)|^2 < +\infty ,$$

pri čemu je $(\varphi_j)_{j=1}^{+\infty}$ ortonormirana baza u $L^2(a,b,|r|)$ koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora B_F takvih da je

$$B_F\varphi_j = \lambda_j\varphi_j \qquad (\lambda_j > 0 , \ j = 1,2,\dots) .$$

Stavimo

$$h_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} (f,\varphi_j)\varphi_j \in \mathcal{D}[B_F] \qquad (\nu = 1,2,\dots) .$$

Očigledno je

$$(B_F(h_\nu - h_\mu), h_\nu - h_\mu) = \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \lambda_j |(f,\varphi_j)|^2 \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \to +\infty, \mu<\nu) \qquad (7.25)$$

Prema teoremu 6.1 operator B_F^{-1} je Hilbert-Schmidtov operator, sa jezgrom $G(\cdot,\cdot,0)$, u prostoru $L^2(a,b,|r|)$. Mercerov teorem povlači (vidite [37, dio II, str.379] ili [40, §15, teorem 13]) da za funkciju $G(\cdot,\cdot,0)$, koju ćemo u daljem označavati sa $G(\cdot,\cdot)$, vrijedi

$$G_{kk}(x,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} |\hat{\varphi}_j^{(k)}(x)|^2/\lambda_j \qquad (k = 0,1,\dots,n-1 , \ x \in \mathcal{W}') ,$$

pri čemu sume konvergiraju uniformno na $\mathcal{W}'$. Pošto su funkcije G_{kk} $(k = 0,1,\dots,n-1)$ neprekidne na $[a,b]\times[a,b]$ odavde slijedi da postoji konstanta $K>0$ takva da je

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\hat{\varphi}_j^{(k)}(x)|^2/\lambda_j \leqslant K \qquad (x \in \mathcal{W}', \ k = 0,1,\dots,n-1) .$$

Zbog toga

$$\begin{aligned} |\hat{h}_\nu^{(k)}(x) - \hat{h}_\mu^{(k)}(x)|^2 &= \Big|\sum_{j=\mu+1}^{\nu} (f,\varphi_j)\varphi_j^{(k)}(x)\Big|^2 \\ &\leqslant \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \lambda_j |(f,\varphi_j)|^2 \sum_{j=\mu+1}^{\nu} |\hat{\varphi}_j^{(k)}(x)|^2/\lambda_j \\ &\leqslant K \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \lambda_j |(f,\varphi_j)|^2 \qquad (x \in \mathcal{W}', \ k = 0,1,\dots,n-1, \mu<\nu) \qquad (7.26) \end{aligned}$$

Dakle, za $k = 0,1,\dots,n-1$ niz $(\hat{h}_\nu^{(k)})_{\nu=1}^{+\infty}$ konvergira uniformno na $\mathcal{W}'$. Vrijedi

$$(B_F(h_\nu - h_\mu), h_\nu - h_\mu)$$

$$= \int_a^b p_o |\hat{h}_\nu^{(n)} - \hat{h}_\mu^{(n)}|^2 dx + \sum_{k=1}^{n} \int_a^b p_k |\hat{h}_\nu^{(n-k)} - \hat{h}_\mu^{(n-k)}|^2 dx .$$

Prema (7.25) i (7.26) odavde slijedi

$$\int_a^b p_o |\hat{h}_\nu^{(n)} - \hat{h}_\mu^{(n)}|^2 dx + \sum_{m=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_m}^{b_m} p_k |\hat{h}_\nu^{(n-k)} - \hat{h}_\mu^{(n-k)}|^2 dx \longrightarrow 0$$

$$(\nu, \mu \longrightarrow +\infty, \nu > \mu) . \qquad (7.27)$$

Pošto je $\ell_{I_m}((\hat{h}_\nu - \hat{h}_\mu)|_{I_m}) = 0 \quad (m = 1,\dots,s, \ \nu,\mu = 1,2,\dots)$ na osnovu (1.5) vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{a_m}^{b_m} p_k |\hat{h}_\nu^{(n-k)} - \hat{h}_\mu^{(n-k)}|^2 dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ (\hat{h}_\nu - \hat{h}_\mu)^{[2n-k]}(b_m)(\hat{h}_\nu^* - \hat{h}_\mu^*)^{(k-1)}(b_m)$$

$$- (\hat{h}_\nu - \hat{h}_\mu)^{[2n-k]}(a_m)(\hat{h}_\nu^* - \hat{h}_\mu^*)^{(k-1)}(a_m) \Big\} , \qquad (7.28)$$

$$(m = 1,\dots,s, \ \nu,\mu = 1,2,\dots).$$

Relacije (7.25) i (7.26) povlače

$$(\hat{h}_\nu^* - \hat{h}_\mu^*)^{(k-1)}(a_m) \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \ k=1,\dots,n, \ m=1,\dots,s)$$

$$(\hat{h}_\nu^* - \hat{h}_\mu^*)^{(k-1)}(b_m) \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \ k=1,\dots,n, \ m=1,\dots,s) .$$

Odavde slijedi da je skup

$$\{ (h_\nu - h_\mu)_{[1]} , \ \nu,\mu = 1,2,\dots \}$$

ograničen u $\mathbb{C}^{2ns}$. Prema lemi 7.10 skup

$$\{ (h_\nu - h_\mu)_{[2]} , \ \nu,\mu = 1,2,\dots \}$$

je takođe ograničen. Dakle desna strana u jednakosti (7.28) konvergira ka nuli kada $\nu,\mu \longrightarrow +\infty$. Iz relacije (7.27) sada slijedi

$$\int_{\mathcal{W}'} p_o |h_\nu^{(n)} - h_\mu^{(n)}|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty) ,$$

i zbog toga

$$\int_{b_m}^{a_{m+1}} p_o |h_\nu^{(n)} - h_\mu^{(n)}|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \ m = 0,1,\dots,s) ,$$

pri čemu je $b_o = a$ ako je $a < a_1$ i $a_{s+1} = b$ ako je $b_s < b$.

Ako lemu 7.1 primijenimo na zatvorene intervale $[a,a_1]$, $[b_1,a_2]$, ..., $[b_{s-1},a_s]$, $[b_s,b]$, onda dobijamo da postoji funkcija y definina na $\mathcal{W}'$ takva da niz $((\hat{h}_\nu|_{\mathcal{W}'})^{(k)})_{\nu=1}^{+\infty}$ konvergira uniformno na $\mathcal{W}'$ ka apsolutno neprekidnoj funkciji $y^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$ i $\int_{\mathcal{W}'} p_0|y^{(n)}|^2dx < +\infty$. Pošto $h_\nu \longrightarrow f$ $(\nu \longrightarrow +\infty)$ u $L^2(a,b,|r|)$, tj.

$$\int_{\mathcal{W}'} |\hat{h}_\nu(x) - \tilde{f}(x)|^2|r(x)|dx \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow +\infty),$$

pri čemu je $\tilde{f}$ bilo koja funkcija iz f, dobijamo

$$\tilde{f}(x) = y(x) \qquad (x \in \mathcal{W}'),$$

i zbog toga

$$\tilde{f}^{(k)}(x) = y^{(k)}(x) \qquad (k = 0,1,\dots,n-1, \quad x \in \mathcal{W}')$$

i

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)}(x) \qquad \text{za gotovo sve } x \in \mathcal{W}'.$$

Dakle funkcija $\tilde{f}$ ima apsolutno neprekidne izvode do, uključivo, (n-1)-og reda na $\mathcal{W}'$ i

$$\int_{\mathcal{W}'} p_0|f^{(n)}|^2dx < +\infty. \tag{7.29}$$

Pošto je funkcija $\tilde{f} \in f$ bila proizvoljna, možemo odabrati funkciju $\tilde{f} \in f$ tako da izvodi $\tilde{f}, \tilde{f}', \dots, \tilde{f}^{(n-1)}$ budu apsolutno neprekidne funkcije na $[a,b]$. Funkcije $\hat{h}_\nu|_{I_m}$, $\nu = 1,2,\dots$ zadovoljavaju glavne rubne uslove (7.5) za $m = 1,\dots,s$ i

$$\hat{h}_\nu^{(k)}(a_m) \longrightarrow \tilde{f}^{(k)}(a_m) \qquad (\nu \longrightarrow +\infty, \quad k = 0,1,\dots,n-1, \quad m = 1,\dots,s)$$

$$\hat{h}_\nu^{(k)}(b_m) \longrightarrow \tilde{f}^{(k)}(b_m) \qquad (\nu \longrightarrow +\infty, \quad k = 0,1,\dots,n-1, \quad m = 1,\dots,s)$$

Odavde slijedi da funkcije $\tilde{f}|_{I_m}$ zadovoljavaju glavne rubne uslove (7.5), za $m = 1,\dots,s$. Prema primjedbi 7.4 imamo da za $m \in \{1,\dots,s\}$ postoji funkcija v_m za koju je

$$v_m^{(k)}(a_m) = \tilde{f}^{(k)}(a_m), \quad v_m^{(k)}(b_m) = \tilde{f}^{(k)}(b_m) \qquad (k = 0,1,\dots,n-1)$$

i koja je rješenje jednačine (7.1). Za funkciju v_m očigledno vrijedi

$$\int_{I_m} p_0|v_m^{(n)}|^2dx < +\infty \qquad (m = 1,\dots,s). \tag{7.30}$$

Stavimo

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) , & x \in \mathcal{W}' \\ v_m(x) , x \in I_m , & m = 1,\ldots,s . \end{cases}$$

Tada $\tilde{\tilde{f}} \in f$ i funkcija $\tilde{\tilde{f}}$ ima osobine (7.A i C) . Zbog (7.29) i (7.30) imamo

$$\int_a^b p_0 |\tilde{\tilde{f}}^{(n)}|^2 dx < +\infty ,$$

tj. funkcija $\tilde{\tilde{f}}$ ima osobinu (7.B) . Prema primjedbi 7.3 slijedi $f \in \mathcal{L}$. Pored toga vrijedi

$$\hat{h}_\nu^{(k)}(\alpha) \longrightarrow \tilde{f}^{(k)}(\alpha) = \hat{f}^{(k)}(\alpha) \qquad (\nu \longrightarrow +\infty , \quad k = 0,1,\ldots,n-1)$$

$$\hat{h}_\nu^{(k)}(\beta) \longrightarrow \tilde{f}^{(k)}(\beta) = \hat{f}^{(k)}(\beta) \qquad (\nu \longrightarrow +\infty , \quad k = 0,1,\ldots,n-1)$$

Pošto $h_\nu \in \mathcal{D}(B_F)$ imamo $\hat{h}_\nu^{(k)}(\alpha) = \overline{h}_\nu^{(k)}(\alpha) = 0$, $\hat{h}_\nu^{(k)}(\beta) = \overline{h}_\nu^{(k)}(\beta) = 0$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $\nu = 1,2,\ldots$, pa slijedi

$$\hat{f}^{(k)}(\alpha) = \hat{f}^{(k)}(\beta) = 0 , \quad k = 0,1,\ldots,n-1 .$$

Koristeći metod korišten u dokazu propozicije 7.6 dobijamo

$$\hat{f}^{(k)}(a) = \hat{f}^{(k)}(b) = 0 , \quad k = 0,1,\ldots,n-1 .$$

Dakle $f \in \mathcal{L}_0$. Tako je inkluzija (7.24) dokazana.

Inkluzije (7.23) i (7.24) daju

$$\mathcal{D}[\hat{B}] = \mathcal{D}[B_F] = \mathcal{L}_0$$

Prema teoremu 10 iz [37, dio I] slijedi da je operator B_F Friedrichsovo proširenje operatora $\hat{B}$. Teorem je dokazan.

TEOREM 7.12. ([37, dio II, 10^0]) Neka je B hermitsko proširenje operatora $\hat{B}$ određeno rubnim uslovima (5.5) . Tada $f \in \mathcal{D}[B]$ ako i samo ako $f \in \mathcal{L}$ i funkcija $\hat{f}$ zadovoljava maksimalan sistem linearno nezavisnih glavnih rubnih uslova koji su određeni rubnim uslovima (5.5).

Ovaj teorem može se dokazati kombiniranjem ideje korištene u [37, dio II, 10^0] i metoda korištenog u prethodnom dokazu.

III. DIFERENCIJALNI OPERATORI U KREINOVOM PROSTORU $L^2(a,b,r)$

III.1. Osnovne osobine

1.1. U ovoj glavi bavićemo se diferencijalnim operatorima pridruženim kvazi-diferencijalnoj jednačini 2n-tog reda

$$\ell(y) - \lambda r y = 0 \quad \text{na} \quad (a,b) \ . \tag{1.1}$$

Težinska funkcija r je realna funkcija definisana na (a,b), integrabilna na svakom kompaktnom podintervalu intervala (a,b) i indefinitna, tj. oba skupa $\Delta_+ = \{x \in (a,b) : r(x) > 0\}$ i $\Delta_- = \{x \in (a,b) : r(x) < 0\}$ imaju pozitivnu Lebesgueovu mjeru. Pored toga pretpostavljamo da je $p_0 > 0$ gotovo svuda na (a,b).

Vektorski prostor $L^2(a,b,|r|)$ sa indefinitnim skalarnim produktom

$$[f,g] := \int_a^b \tilde{f}(x)\tilde{g}^*(x)r(x)dx \quad (f,g \in L^2(a,b,|r|)), \quad \tilde{f} \in f, \quad \tilde{g} \in g \ ) \tag{1.2}$$

označavamo sa $L^2(a,b,r)$. Prostor $(L^2(a,b,r),[\cdot,\cdot])$ je Kreinov prostor sa fundamentalnom simetrijom J definisanom na slijedeći način. Za $f \in L^2(a,b,r)$ stavljamo $Jf = h$ ako za neke $\tilde{h} \in h$ i $\tilde{f} \in f$ vrijedi $h(x) = (\operatorname{sgn} r(x))f(x)$ $(x \in (a,b))$. Odgovarajući pozitivno definitni skalarni produkt je $(f,g) = [Jf,g]$ $(f,g \in L^2(a,b,r))$. Ovaj skalarni produkt dat je u (II.2.3) i $(L^2(a,b,r),(\cdot,\cdot))$ je Hilbertov prostor.

U Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$ proučavaćemo operatore

$$\tilde{A} := J\tilde{B} \ , \quad \hat{A} := J\hat{B} \ , \quad \hat{A}_0 := J\hat{B}_0 \ ,$$

kao i hermitska proširenja operatora $\hat{A}$ u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$. Za $f \in \mathcal{D}(\tilde{B}) = \mathcal{D}(\tilde{A})$ imamo

$$\tilde{A}f = g \quad \text{ako i samo ako} \quad \ell(\tilde{f}) = r\tilde{g} \quad \text{g.s. na} \quad (a,b) \quad \text{i} \quad \tilde{g} \in g \in L^2(a,b,r)$$

Na osnovu gornjih definicija i teorema II.4.2, operator $\hat{A}$ je zatvoren simetričan operator u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$. Operator $\tilde{A}$ je hermitski adjungiran operatoru $\hat{A}$ u odnosu na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$. Prema propoziciji II.3.7 operator $\hat{A}$ je zatvorenje operatora $\hat{A}_0$. Očigledno vrijedi

$$[\tilde{A}f,g] = (\tilde{B}f,g) \qquad (f,g \in \mathcal{D}(\tilde{B}) = \mathcal{D}(\tilde{A})) ,$$
$$[\hat{A}f,g] = (\hat{B}f,g) \qquad (f,g \in \mathcal{D}(\hat{B}) = \mathcal{D}(\hat{A})) ,$$
$$[\hat{A}_o f,g] = (\hat{B}_o f,g) \qquad (f,g \in \mathcal{D}(\hat{B}_o) = \mathcal{D}(\hat{A}_o)) . \tag{1.3}$$

Zatvoren simetričan operator $\hat{A}$ ima hermitska proširenja u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$. U stvari, operator A je hermitsko proširenje operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ ako i samo ako je operator $B := JA$ hermitsko proširenje operatora $\hat{B}$ u Hilbertovom prostoru $L^2(a,b,|r|)$. Prema tome hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ je potpuno određeno rubnim uslovima u tačkama a i b . Ovi rubni uslovi su isti za operatore A i $B = JA$ i o njima je bilo riječi u odjeljku II.5.

1.2. Podsjetimo se da za skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathcal{P}$ kažemo da ima <u>konačan broj $\varkappa$ negativnih kvadrata</u> ako je taj skalarni produkt negativno definitan na $\varkappa$-dimenzionalnom potprostoru prostora $\mathcal{P}$ i ne postoji $(\varkappa + 1)$-dimenzionalan potprostor sa ovom osobinom. U ovoj glavi proučavaćemo problem (1.1) uz slijedeće pretpostavke (P1) i (P2) .

(P1) Skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$, definisan na $\mathcal{D}(\hat{A}_o)$ sa

$$\{f,g\} := [\hat{A}_o f,g] \qquad (f,g \in \mathcal{D}(\hat{A}_o))$$

ima konačan broj negativnih kvadrata.

PROPOZICIJA 1.1. Uslov (P1) je zadovoljen u slijedećim slučajevima.

(a) Operator $\hat{B}$ ima hermitsko proširenje B u Hilbertovom prostoru $L^2(a,b,|r|)$ takvo da se $\sigma(B) \cap (-\infty,0)$ sastoji od konačno mnogo svojstvenih vrijednosti.

(b) Za svaku singularnu rubnu tačku a ili b problema (1.1) postoji $a' \in (a,b)$ ili $b' \in (a,b)$ takvo da skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ ima konačan broj negativnih kvadrata na potprostoru svih klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\hat{A}_o)$ za koje funkcija $\overline{f}$ uzima vrijednost nula van intervala (a,a') ili (b',b) , respektivno.

PRIMJEDBA 1.2. Ako je problem (1.1) regularan, onda, prema teoremu II.6.3, imamo slučaj (a) .

DOKAZ propozicije 1.1.(a) Označimo sa $\varkappa (< +\infty)$ ukupnu višestrukost svih negativnih svojstvenih vrijednosti operatora B . Dokazaćemo da skalarni produkt $(B\cdot,\cdot)$ definisan na $\mathcal{D}(B)$ ima $\varkappa$ negativnih kvadrata. Označimo sa F spektralnu funkciju operatora B . Stavimo

$\mathcal{H}_0 = \ker(B)$, $\mathcal{H}_1 = F(-\infty,0)L^2(a,b,|r|)$, $\mathcal{H}_2 = F(0,+\infty)L^2(a,b,|r|)$.

Potprostor $\mathcal{H}_1$ je negativan, a $\mathcal{H}_2 \cap \mathcal{D}(B)$ pozitivan u odnosu na skalarni produkt $(B\cdot,\cdot)$ i vrijedi $\dim \mathcal{H}_1 = \varkappa$. Na osnovu leme 1.2 iz [62] , skalarni produkt $(B\cdot,\cdot)$ ima $\varkappa$ negativnih kvadrata na $\mathcal{H}_1 \dot{+} (\mathcal{H}_2 \cap \mathcal{D}(B))$. Odavde se lako dobije da skalarni produkt $(B\cdot,\cdot)$ ima takođe $\varkappa$ negativnih kvadrata na $\mathcal{D}(B)$. Zaista, neka je $\mathcal{F}$ potprostor domena $\mathcal{D}(B)$ za koji je $(Bf,f) < 0$ $(f \in \mathcal{F} \setminus \{0\})$. Označimo sa P_1 ortogonalni projektor na $\mathcal{H}_1 \dot{+} \mathcal{H}_2$ u $L^2(a,b,|r|)$. Tada je $P_1\mathcal{F}$ negativan u odnosu na $(B\cdot,\cdot)$, pa je $\dim P_1\mathcal{F} < \varkappa$. Neka $f_1,\ldots,f_{\varkappa+1} \in \mathcal{F}$. Tada postoje kompleksni brojevi $\xi_1,\ldots,\xi_{\varkappa+1}$, od kojih je bar jedan različit od nule takvi da $P_1(\xi_1 f_1+\ldots+\xi_{\varkappa+1}f_{\varkappa+1}) = 0$. Zbog toga $\xi_1 f_1+\ldots+\xi_{\varkappa+1}f_{\varkappa+1} \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{F} = \{0\}$, tj. $f_1,\ldots,f_{\varkappa+1}$ su linearno zavisni. Dakle $\dim \mathcal{F} \leqslant \varkappa$. Tako je dokazano da skalarni produkt $(B\cdot,\cdot)$ ima konačan broj $\varkappa$ negativnih kvadrata na $\mathcal{D}(B)$. Odavde slijedi da skalarni produkt $(\hat{B}_0\cdot,\cdot)$, a prema (1.3) i skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ ima konačan broj negativnih kvadrata.

(b) Da bi dokazali da je uslov (P1) ispunjen u slučaju (b) , koristimo Glazmanov metod dekompozicije [18] . Pretpostavićemo da je samo rubna tačka a singularna tačka problema (1.1). Prvo ćemo razmatrati skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ na skupu $\mathcal{D}'$ svih klasa ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(\hat{A}_0)$ za koje je $\overline{f}^{[k]}(a') = 0$, $k = 0,1,\ldots,2n-1$. S obzirom na primjedbu II.3.6 imamo

$$L^2(a,b,|r|) = L^2(a,a',|r|) \oplus L^2(a',b,|r|) ,$$

pri čemu je suma ortogonalna u odnosu na skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$. Vrijedi

$$\mathcal{D}' = (L^2(a,a',|r|) \cap \mathcal{D}') \oplus (L^2(a',b,|r|) \cap \mathcal{D}') ,$$

pri čemu je suma ortogonalna i u odnosu na skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$. Prema dijelu (a) ove propozicije i primjedbi 1.2, skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ ima konačan broj, recimo $\varkappa_1$, negativnih kvadrata na $\mathcal{D}' \cap L^2(a',b,|r|)$. Na osnovu propozicije II.4.1 skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ ne degeneriše ni na $\mathcal{D}' \cap L^2(a',b,|r|)$ ni na $\mathcal{D}' \cap L^2(a,a',|r|)$. Pošto pretpostavljamo da skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ ima konačan broj, recimo $\varkappa_2$, negativnih kvadrata na $\mathcal{D}' \cap L^2(a,a',|r|)$, na osnovu lema 1.1 i 1.2 iz [62] dobijamo da skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ ima

$\varkappa_1 + \varkappa_2$ negativnih kvadrata na $\mathcal{D}'$.

Očigledno je $\dim \mathcal{D}(\hat{A}_o)/\mathcal{D}' = 2n$. Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}(\hat{A}_o)$ potprostor sa osobinom $\{f,f\} < 0$ $(f \in \mathcal{F} \setminus \{0\})$. Prema upravo dokazanom je $\dim (\mathcal{F} \cap \mathcal{D}') \leq \varkappa_1 + \varkappa_2$. Neka je $f_1,\dots,f_\nu$ baza potprostora $\mathcal{F} \cap \mathcal{D}'$ i neka su $f_1,\dots,f_\nu, f_{\nu+1},\dots,f_{\nu+k} \in \mathcal{D}(\hat{A}_o)$ linearno nezavisni. Tada su $f_{\nu+1},\dots,f_{\nu+k}$ linearno nezavisni po modulu $\mathcal{D}'$. Zaista,

ako $\sum_{j=1}^{k} \xi_j f_{\nu+j} \in \mathcal{D}'$, onda $\sum_{j=1}^{k} \xi_j f_{\nu+j} = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i f_i$.

Posljednja jednakost daje $\xi_j = \zeta_i = 0$, $j = 1,\dots,k$, $i = 1,\dots,\nu$. Zbog toga je $k \leq 2n$. Dakle $\dim \mathcal{F} \leq \varkappa_1 + \varkappa_2 + 2n$, tj. skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ ima konačan broj negativnih kvadrata na $\mathcal{D}(\hat{A}_o)$. Propozicija je dokazana.

LEMA 1.3. Pretpostavimo da operator $\hat{A}_o$ zadovoljava uslov (P1). Tada za svako simetrično proširenje A operatora $\hat{A}_o$ u $L^2(a,b,r)$ skalarni produkt $[A\cdot,\cdot]$ definisan na $\mathcal{D}(A)$ ima konačan broj negativnih kvadrata.

DOKAZ. Dokažimo prvo da skalarni produkt $[\hat{A}\cdot,\cdot]$ definisan na $\mathcal{D}(\hat{A})$ ima konačan broj negativnih kvadrata. Prostor $(\mathcal{D}(\hat{A}_o), \{\cdot,\cdot\})$ je pred-Pontrjaginov prostor. Pošto je operator $\hat{A}$ zatvorenje operatora $\hat{A}_o$, za $f \in \mathcal{D}(\hat{A})$ postoji niz $(f_k) \subseteq \mathcal{D}(\hat{A}_o)$ takav da $f_k \longrightarrow f$ $(k \longrightarrow +\infty)$ po normi prostora $L^2(a,b,|r|)$ i $\{f_k - f_m, f_k - f_m\} \longrightarrow 0$ $(k,m \longrightarrow +\infty)$. Odavde slijedi da je niz (f_k) Cauchyjev niz u pred-Pontrjaginovom prostoru $(\mathcal{D}(\hat{A}_o), \{\cdot,\cdot\})$, vidite [62, §2.4]. Prema tome prostor $(\mathcal{D}(\hat{A}), [\hat{A}\cdot,\cdot])$ možemo smatrati potprostorom kompletizacije prostora $(\mathcal{D}(\hat{A}_o), \{\cdot,\cdot\})$ do Pontrjaginovog prostora. Takva kompletizacija postoji prema teoremu 2.5 iz [62]. Dakle skalarni produkt $[\hat{A}\cdot,\cdot]$ ima konačan broj negativnih kvadrata. Neka je A simetrično proširenje operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$. Tada je $\dim \mathcal{D}(A)/\mathcal{D}(\hat{A})$ konačna i na isti način kao u dokazu dijela (b) propozicije 1.1 može se pokazati da skalarni produkt $[A\cdot,\cdot]$ ima konačan broj negativnih kvadrata. Lema je dokazana.

1.3. Sada ćemo formulisati drugu pretpostavku

(P2) Neko hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}_0$ u $L^2(a,b,r)$ ima neprazan rezolventni skup.

Za kompleksan broj λ kažemo da je <u>tačka regularnog tipa</u> zatvorenog operatora T u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ ako je $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ zatvoren potprostor u $\mathcal{H}$ i $\ker(T-\lambda I)=\{0\}$. Skup svih tačaka regularnog tipa operatora T označavamo sa $r(T)$. Skup $r(T)$ je otvoren ([60, propozicija 8.1]) .

PROPOZICIJA 1.4. (vidite [14, lema 3.1]) Slijedeće izjave su ekvivalentne sa (P2).

(P2′) Za neko hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ i za neko $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ rang $\mathcal{R}(A-\lambda_0 I)$ je zatvoren.

(P2″) Za neko $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ rang $\mathcal{R}(\hat{A}-\lambda_0 I)$ je zatvoren.

(P2‴) Za bilo koje hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ vrijedi $\varrho(A) \neq \emptyset$.

DOKAZ. Implikacije (P2‴) => (P2) => (P2′) su očigledne. Da bi dokazali (P2′) => (P2″) razmotrimo, pod pretpostavkom (P2′), skup $\mathcal{R}(\hat{A}-\lambda_0 I)$. Budući da je faktorski prostor

$$\mathcal{R}(A-\lambda_0 I)/\mathcal{R}(\hat{A}-\lambda_0 I) \tag{1.4}$$

konačno dimenzionalan i $\mathcal{R}(A-\lambda_0 I)$ je zatvoren, potprostor $\mathcal{R}(\hat{A}-\lambda_0 I)$ mora takođe biti zatvoren.

Sada ćemo dokazati (P2″) => (P2‴). Neka je $a' \in (a,b)$. Razmotrimo restrikciju A_1 operatora $\hat{A}$ na domen

$$\mathcal{D}(A_1)=\{f \in \mathcal{D}(\hat{A}) : \bar{f}^{[k]}(a')=0 , \quad k=0,1,\dots,2n-1\}. \tag{1.5}$$

Koristeći Glazmanov metod dekompozicije pokazuje se da je operator A_1 zatvoren. Kako je faktorski prostor

$$\mathcal{R}(\hat{A}-\lambda_0 I)/\mathcal{R}(A_1-\lambda_0 I) \tag{1.6}$$

konačno dimenzionalan i $\mathcal{R}(\hat{A}-\lambda_0 I)$ je zatvoren, to potprostor $\mathcal{R}(A_1-\lambda_0 I)$ mora biti zatvoren. Jednačina $(A_1-\lambda_0 I)u=0$ ekvivalentna je sa problemom

$$\ell(\bar{u})-\lambda_0 r\bar{u}=0 , \quad \bar{u}^{[k]}(a')=0 \qquad (k=0,1,\dots,2n-1)$$

koji ima samo trivijalno rješenje $u=0$. Prema tome (P2″) povlači da skup $r(A_1)$, tačaka regularnog tipa operatora A_1, nije prazan. Skup $r(A_1)$ je otvoren podskup kompleksne ravni. Pošto je faktorski skup

$$\mathcal{R}(A - \lambda I)/\mathcal{R}(A_1 - \lambda I) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

konačno dimenzionalan, rang $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ je zatvoren za svako $\lambda \in r(A_1)$. Zbog toga je

$$r(A_1) \subseteq \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \rho(A) . \tag{1.7}$$

Budući da je $L^2(a,b,|r|)$ separabilan prostor, skup $\sigma_p(A)$ je prebrojiv. Pošto $\lambda \in \sigma_r(A)$ povlači $\lambda^* \in \sigma_p(A)$, imamo da je $\sigma_r(A)$ takođe prebrojiv skup. Dakle inkluzija (1.7) povlači $\rho(A) \neq \emptyset$. Propozicija je dokazana.

PROPOZICIJA 1.5. (vidite [14, korolar 3.3]) Uslov (P2) je zadovoljen u slijedećim slučajevima.

(a) Za neko hermitsko proširenje B operatora $\hat{B}$ u $L^2(a,b,|r|)$ nula je izolovana tačka skupa $\sigma(B)$ ili $0 \in \rho(B)$.

(b) Za svaku singularnu rubnu tačku a ili b problema (1.1) postoji $a' \in (a,b)$ ili $b' \in (a,b)$ takvo da težinska funkcija r ne mijenja znak na (a,a') ili (b',b), respektivno.

PRIMJEDBA 1.6. Ako je problem (1.1) regularan, prema teoremu II.6.3 imamo slučaj (a).

DOKAZ propozicije 1.5.(a) U slučaju da $0 \in \rho(B)$ očigledno je da $0 \in \rho(A)$ za $A = JB$. Ako je nula izolovana tačka spektra $\sigma(B)$, vrijedi $\mathcal{R}(B) = (\ker(B))^{(\perp)}$, pri čemu je $\ker(B)$ nul-potprostor operatora B i $(\perp)$ označava ortogonalni komplement u $L^2(a,b,|r|)$. Dakle, $\mathcal{R}(B)$ je zatvoren potprostor, pa je i $\mathcal{R}(A) = J\mathcal{R}(B)$ takođe zatvoren potprostor, tj. operator A zadovoljava (P2') za $\lambda_o = 0$.

(b) Ovdje ponovo koristimo Glazmanov metod dekompozicije. Pretpostavljamo da je samo a singularna rubna tačka problema (1.1). Ako je b ili ako su i a i b singularne rubne tačke, postupa se na sličan način. Koristimo notaciju uvedenu u primjedbi II.3.6. Ako je $\Delta' = (a,a']$ i $\Delta'' = [a',b]$, onda za domen $\mathcal{D}(A_1)$ uveden u (1.5) imamo

$$\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(\hat{A}_{\Delta'}) \oplus \mathcal{D}(\hat{A}_{\Delta''})$$

i

$$A_1 = \hat{A}_{\Delta'} \oplus \hat{A}_{\Delta''} .$$

Da bi to dokazali treba koristiti propoziciju II.4.5 i primijetiti da je

$$\mathcal{R}(\hat{A}_{\Delta'}) \subseteq L^2(a,a',|r|)\ , \quad \mathcal{R}(\hat{A}_{\Delta''}) \subseteq L^2(a',b,|r|)\ ,$$

$$\hat{A}_{\Delta'} = \hat{A}|_{\mathcal{D}(\hat{A}_{\Delta'})} \quad \text{i} \quad \hat{A}_{\Delta''} = \hat{A}|_{\mathcal{D}(\hat{A}_{\Delta''})}\ .$$

Iz primjedbe 1.6 i propozicije 1.4 slijedi da postoji $\lambda_o \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ takvo da je $\mathcal{R}(\hat{A}_{\Delta'} - \lambda_o I)$ zatvoren potprostor. Kako je $\hat{A}_{\Delta'}$ zatvoren simetričan operator u Hilbertovom prostoru $L^2(a,a',r)$ rang $\mathcal{R}(\hat{A}_{\Delta'} - \lambda_o I)$ je takođe zatvoren. Odavde slijedi da je $\mathcal{R}(A_1 - \lambda_o I)$ takođe zatvoren. Pošto je faktorski prostor (1.6) konačno dimenzionalan rang $\mathcal{R}(\hat{A} - \lambda_o I)$ je zatvoren, tj. uslov (P2″) je zadovoljen. Propozicija je dokazana.

III.2. Definitibilnost hermitskih proširenja u $L^2(a,b,r)$

2.1. Neposredna posljedica razmatranja u odjeljku 1 je slijedeći teorem.

TEOREM 2.1. Pretpostavimo da operator $\hat{A}_o$ zadovoljava uslove (P1) i (P2). Tada je bilo koje hermitsko proširenje operatora $\hat{A}_o$ u $L^2(a,b,r)$ definitibilan operator.

DOKAZ. Neka je A bilo koje hermitsko proširenje operatora $\hat{A}_o$ u $L^2(a,b,r)$. Lema 1.3 povlači da skalarni produkt $[A\cdot,\cdot]$ definisan na $\mathcal{D}(A)$ ima konačan broj negativnih kvadrata. Na osnovu [47, I.3(c)] za operator A postoji polinom p takav da $[p(A)f,f] \geqslant 0 \quad (f \in \mathcal{D}(p(A)))$. Pošto prema propoziciji 1.4 imamo $\rho(A) \neq \emptyset$, operator A je definitibilan. Teorem je dokazan.

2.2. Nadalje u ovom odjeljku pretpostavljamo da su ispunjeni uslovi teorema 2.1 i A označava proizvoljno hermitsko proširenje operatora $\hat{A}_o$ u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$. Pošto je operator A definitibilan, prema spektralnoj teoriji definitibilnih operatora u Kreinovim prostorima postoji spektralna funkcija sa kritičnim tačkama operatora A (vidite [47], [41], [23]). Spektralnu funkciju operatora A označavaćemo sa E . Slijedeća osobina spektra operatora A je neposredna posljedica njegove definitibilnosti.

Spektar operatora A van realne prave sastoji se od konačno mnogo parova izolovanih svojstvenih vrijednosti λ, λ^* . Linearni omotač korjenih potprostora koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima iz gornje poluravni je neutralan potprostor Kreinovog prostora

$L^2(a,b,r)$.

PRIMJEDBA 2.2. Na osnovu [47, I.3 (b), (c)] (vidjeti takođe [45, §2.5]), za operator A postoji polinom q takav da

$$[Aq(A)f,q(A)f] \geqslant 0 \qquad (f \in \mathcal{D}(Aq(A))) . \tag{2.1}$$

Za polinom q sa osobinom (2.1) kažemo da je <u>minimalan</u> (s obzirom na osobinu (2.1)) ako je bilo koji polinom $q_1(\neq 0)$ koji ima osobinu (2.1) i koji dijeli polinom q, umnožak polinoma q sa konstantom.

U ovom odjeljku sa q označavamo minimalni polinom s obzirom na osobinu (2.1)

PRIMJEDBA 2.3. Skup nula polinoma qq^* van realne prave podudara se sa spektrom operatora A van realne prave. Realan broj $\lambda \neq 0$ je nula polinoma q ako i samo ako je λ ili kritična tačka operatora A ili svojstvena vrijednost operatora A sa osobinom da je $\lambda[f,f] < 0$ za bilo koju svojstvenu funkciju f operatora A koja odgovara svojstvenoj vrijednosti λ . Dokaz ove činjenice je sličan dokazu leme 3 u [23]. Koristeći isti metod moguće je dokazati da je $q(0) \neq 0$ ako i samo ako postoji definitizirajući polinom p operatora A za koji je $|p(0)| + |p'(0)| > 0$. Ako je $q(0) = 0$, prema [47, korolar II.5.2.3] slijedi $0 \in \sigma_p(A)$.

Ako je $\mathcal{L}$ vektorski prostor sa skalarnim produktom $[\cdot,\cdot]$, onda sa $\varkappa_+(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$($\varkappa_-(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$, respektivno) označavamo najmanju gornju među ($\leqslant +\infty$) dimenzija pozitivnih (negativnih, respektivno) potprostora prostora $\mathcal{L}$. Umjesto $\varkappa_\pm(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ često pišemo $\varkappa_\pm(\mathcal{L})$.

Slijedeća lema bavi se proizvoljnim Kreinovim prostorom $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Za potprostore $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ Kreinovog prostora $\mathcal{K}$ kažemo da čine <u>dualni par</u> ako $\mathcal{E}\cap\mathcal{F}^\perp = \mathcal{E}^\perp\cap\mathcal{F} = \{0\}$.

LEMA 2.4. (vidite [7, teorem IX.2.5]) Neka je $\mathcal{F}$ konačno dimenzionalan potprostor Kreinovog prostora $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Stavimo $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}\cap\mathcal{F}^\perp$. Tada postoje potprostori $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ prostora $\mathcal{K}$ takvi da je $\mathcal{F}^0 [\dot{+}] \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}^0 [\dot{+}] \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}^\perp$, $\mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}^0$ čine dualan par i za prostor $\mathcal{K}$ vrijedi slijedeća dekompozicija

$$\mathcal{K} = \mathcal{F}_1 [\dot{+}] \mathcal{F}_2 [\dot{+}] (\mathcal{F}^0 \dot{+} \mathcal{F}_3) . \tag{2.2}$$

Kreinov prostor $\mathcal{K}$ je Pontrjaginov prostor ako i samo ako je $(\mathcal{F}_2,[\cdot,\cdot])$ Pontrjaginov prostor (ili ekvivalentno ako je $\varkappa_-(\mathcal{F}^\perp) < +\infty$) .

U ovom slučaju je

$$\varkappa_-(\mathcal{K}) = \varkappa_-(\mathcal{F}_1) + \varkappa_-(\mathcal{F}_2) + \dim \mathcal{F}^0 . \tag{2.3}$$

DOKAZ. Očigledno vrijedi $\dim \mathcal{F}^0 < +\infty$. Prema [7, lema I.10.7] postoji potprostor $\mathcal{F}_3$ takav da $\mathcal{F}^0$ i $\mathcal{F}_3$ čine dualan par. Na osnovu lema I.10.1 i I.10.3 i korolara I.11.9 iz [7] direktna suma $\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3$ je konačno dimenzionalan potprostor i skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ ne degeneriše na $\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3$, pa je $(\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3, [\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor. Stavimo $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_3$. Pošto je $\mathcal{F}^0 + \mathcal{F}_3^{\perp} = \mathcal{K}$ ([7, lema I.10.8]), slijedi $\mathcal{F}^0 [\dotplus] \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$. Zaista, za bilo koje $x \in \mathcal{F}$ imamo $x = x_0 + x_3$ za neko $x_0 \in \mathcal{F}^0$ i $x_3 \in \mathcal{F}_3$. Kako je $x_0 \in \mathcal{F}^0 \subseteq \mathcal{F}$, to $x_3 \in \mathcal{F}$, tj. $x_3 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1$. Prema [7, teorem I.5.4] skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ ne degeneriše na $\mathcal{F}_1$. Budući da je $\dim \mathcal{F}_1 < +\infty$, prostor $(\mathcal{F}_1, [\cdot,\cdot])$ je Kreinov prostor. Kako je $(\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3) \perp \mathcal{F}_1$, to je i prostor $((\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3) [\dotplus] \mathcal{F}_1, [\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor. Odavde, prema teoremu V.3.4 iz [7], potprostor $(\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3) [\dotplus] \mathcal{F}_1$ je ortogonalno dopunjiv u Kreinovom prostoru $\mathcal{K}$, tj. za potprostor

$$\mathcal{F}_2 := ((\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3) [\dotplus] \mathcal{F}_1)^{\perp}$$

vrijedi dekompozicija (2.2). Iz definicije potprostora $\mathcal{F}_2$ dobijamo $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{F}_3^{\perp}$, pa na sličan način kao i za $\mathcal{F}_1$ zaključujemo da je potprostor $\mathcal{F}_2$ zatvoren, $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$, $\mathcal{F}^0 \perp \mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}^0 [\dotplus] \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}^{\perp}$. Posljednje dvije izjave leme slijede iz dekompozicije (2.2). Primijetimo da vrijedi $\dim \mathcal{F}^0 = \dim \mathcal{F}_3$ ([7, lema I.10.3]). Kako je $\mathcal{F}^0$ neutralan potprostor, odavde slijedi $\varkappa_-(\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3)$ $(= \varkappa_+(\mathcal{F}^0 \dotplus \mathcal{F}_3)) = \dim \mathcal{F}^0$. Lema je dokazana.

Za $\lambda \in \mathbb{R}$ označimo sa $\varkappa_+(\lambda, A)$ ($\varkappa_-(\lambda, A)$, respektivno) minimum brojeva $\varkappa_+(E(\Delta)\mathcal{K})$ ($\varkappa_-(E(\Delta)\mathcal{K})$, respektivno), pri čemu je Δ bilo koji otvoren interval koji sadrži λ i $c(A) \cap \mathrm{Cl}(\Delta) \subseteq \{\lambda\}$. Stavimo

$$\varkappa(\lambda, A) = \min\{\varkappa_+(\lambda, A), \varkappa_-(\lambda, A)\} .$$

Ova veličina je pozitivna ako i samo ako je $\lambda \in c(A)$ i ona se naziva <u>rang indefinitnosti</u> tačke λ (u odnosu na A). Sa $c_\infty(A)$ označavamo skup tačaka $\lambda \in c(A)$ za koje je $\varkappa(\lambda, A) = +\infty$.

Sa $\mathcal{S}_\lambda(A)$ označavamo korjeni potprostor operatora A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ.

PROPOZICIJA 2.5. (a) Sve (realne) kritične tačke operatora A su svojstvene vrijednosti operatora A.

(b) Vrijedi $c_\infty(A) \subseteq \{0, \infty\}$.

(c) Ako je realan broj $\lambda \neq 0$ kritična tačka operatora A, onda postoji svojstvena funkcija f operatora A koja odgovara λ takva da je $\lambda[f,f] \leqslant 0$.

(d) Operator A ima pozitivan i negativan spektar, oba beskonačne višestrukosti, odnosno na obe poluose $(-\infty,0)$ i $(0,+\infty)$ postoji ili beskonačno mnogo svojstvenih vrijednosti ili tačaka neprekidnog spektra.

DOKAZ. Izjava (a) ove propozicije je posljedica propozicije II.5.4 iz [47] i primjedbe 2.2.

(b) Neka je $\lambda \in c(A) \setminus \{0, +\infty\}$ i neka je Δ zatvoren interval koji sadrži λ u svojoj unutrašnjosti i $\Delta \cap c(A) = \{\lambda\}$. Primijenićemo lemu 2.4 na Kreinov prostor $E(\Delta)L^2(a,b,r)$ i njegov konačno dimenzionalan potprostor $\mathcal{S}_\lambda(A) = \mathcal{F}$. Ako je $\lambda > 0$, onda propozicije II.5.1 i II.5.2 iz [47] i primjedba 2.2 povlače da je potprostor $\mathcal{S}_\lambda(A)^\perp$ nenegativan. Zbog toga je potprostor $\mathcal{F}_2 (\subseteq \mathcal{S}_\lambda(A)^\perp)$ iz dekompozicije (2.2) pozitivan. Prema (2.3) imamo

$$\varkappa_-(E(\Delta)L^2(a,b,r)) = \varkappa_-(\mathcal{F}_1) + \dim(\mathcal{F}^0)$$

i ovaj broj je nezavisan od Δ. Dakle, za $\lambda > 0$,

$$\varkappa_-(\lambda, A) = \varkappa_-(\mathcal{F}_1) + \dim(\mathcal{F}^0) < +\infty .$$

Na sličan način se pokazuje da za $\lambda < 0$ vrijedi

$$\varkappa_+(\lambda, A) = \varkappa_+(\mathcal{F}_1) + \dim(\mathcal{F}^0) < +\infty .$$

(c) Neka je $\lambda > 0$ i neka je $\ker(A - \lambda I)$ pozitivan potprostor prostora $L^2(a,b,r)$. Kako je potprostor $\ker(A - \lambda I)$ konačno dimenzionalan, on je i uniformno pozitivan, pa je i ortogonalno dopunjiv u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$. Odavde slijedi $\ker(A - \lambda I) = \mathcal{S}_\lambda(A)$. Dakle potprostor $\mathcal{S}_\lambda(A)$ je uniformno pozitivan. Ovo nije moguće jer $\lambda \in c(A)$ i polinom $t \longmapsto tq(t)q^*(t)$, $t \in \mathbb{C}$ je definizirajući polinom operatora A (vidite (2.1)) i ovaj polinom je nenegativan u nekoj okolini tačke λ.

(d) Pošto spektar operatora A van realne linije ima konačnu višestrukost možemo ga zanemariti. Pretpostavimo da se negativni spektar operatora A sastoji od konačno mnogo svojstvenih vrijednosti. Neka su Δ_o i Δ_1 disjunktni intervali iz $\mathbb{R}$ takvi da rubne tačke ovih intervala nisu kritične tačke operatora A, nula je unutrašnja tačka intervala Δ_o, $\Delta_o \cap c(A) \subseteq \{0\}$, Δ_1 je konačan interval sadržan u $(-\infty,0)$ i $\Delta_1 \supseteq \sigma(A) \cap (-\infty,0)$. Neka je $\Delta_2 = \mathbb{R} \setminus (\Delta_o \cup \Delta_1)$. Tada je potprostor $E(\Delta_1)L^2(a,b,r)$ konačno dimenzionalan. Koristeći $\sigma(A) \cap (-\infty,0) \cap \Delta_o = \emptyset$ i primjedbu 2.2, na isti način kao u dijelu (b) ovog dokaza, može se pokazati da je $\varkappa_-(E(\Delta_o)L^2(a,b,r)) < +\infty$. Na isti način dobijamo da je i $\varkappa_-(E(\Delta_2)L^2(a,b,r)) < +\infty$. Odavde slijedi da je $\varkappa_-(L^2(a,b,r)) < +\infty$. Ovo je kontradikcija jer indefinitnost funkcije r povlači $\varkappa_-(L^2(a,b,r)) = +\infty$. Dakle negativni spektar operatora A ima beskonačnu višestrukost. Na sličan način se pokazuje da pozitivni spektar operatora A ima beskonačnu višestrukost. Propozicija je dokazana.

PRIMJEDBA 2.6. Na osnovu primjedbe 2.3 i propozicije 2.5 realan broj $\lambda \neq 0$ je nula polinoma q ako i samo ako je svojstvena vrijednost operatora A i postoji odgovarajuća svojstvena funkcija f za koju je $\lambda[f,f] \leqslant 0$.

Specijalno, ako je spektar $\sigma(A)$ diskretan, prema propoziciji 2.5 (d), operator A ima beskonačno mnogo negativnih i beskonačno mnogo pozitivnih svojstvenih vrijednosti. Pošto je u ovom slučaju svaka svojstvena vrijednost operatora A izolovana tačka spektra $\sigma(A)$ imamo $c_s(A) \subseteq \{\infty\}$. Odavde slijedi da skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ ne degeneriše na korjenim potprostorima koji odgovaraju realnim svojstvenim vrijednostima operatora A i ovi potprostori su ortogonalno dopunjivi u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$.

Označimo sa $\varkappa_A$ broj negativnih kvadrata skalarnog produkta $[A\cdot,\cdot]$ definisanog na $\mathcal{D}(A)$.

PROPOZICIJA 2.7. Operator A ima najmanje $\varkappa_A$ svojstvenih vrijednosti λ (računatih onoliko puta kolika je njihova algebarska višestrukost) u zatvorenoj gornjoj poluravni sa slijedećom osobinom: Ako je $\lambda \neq 0$, onda postoji odgovarajuća svojstvena funkcija f operatora A za koju je $\lambda[f,f] \leqslant 0$.

DOKAZ. Na osnovu primjedbe 2.6 u zatvorenoj gornjoj poluravni postoji konačno mnogo svojstvenih vrijednosti sa osobinom navedenom u propoziciji 2.7. Neka su Δ_o i Δ_1 disjunktni intervali u $\overline{\mathbb{R}}$, takvi da njihove rubne tačke nisu nule polinoma q , oni ne sadrže nenulte nule polinoma q i $0 \in \Delta_0$, $\infty \in \Delta_1$. Stavimo $\mathcal{K}_0 = E(\Delta_0)L^2(a,b,r)$, $\mathcal{K}_1 = E(\Delta_1)L^2(a,b,r)$ i neka je $\mathcal{K}_2$ ortogonalni komplement potprostora $\mathcal{K}_0 [\dot{+}] \mathcal{K}_1$ u $(L^2(a,b,r),[\cdot,\cdot])$. Tada je $A|_{\mathcal{K}_1}$ pozitivan operator u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K}_1,[\cdot,\cdot])$, tj. skalarni produkt $[A\cdot,\cdot]$ je pozitivan na $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{D}(A)$. Označimo sa $\varkappa'_A$ ($\varkappa''_A$, respektivno) broj negativnih kvadrata skalarnog produkta $[A\cdot,\cdot]$ definisanog na $\mathcal{K}_0$ ($\mathcal{K}_2$, respektivno). Na sličan način kao u dokazu propozicije 1.1(a) dobijamo da je $\varkappa'_A + \varkappa''_A = \varkappa_A$. Budući da je $A|_{\mathcal{K}_2}$ ograničen operator i $0 \in \rho(A|_{\mathcal{K}_2})$, prostor $(\mathcal{K}_2,[A\cdot,\cdot])$ je Pontrjaginov prostor sa indeksom $\varkappa''_A$. Operator $A|_{\mathcal{K}_2}$ je hermitski u ovom Pontrjaginovom prostoru, pa postoji $\varkappa''_A$-dimenzionalan nepozitivan potprostor $\mathcal{J}_-$ invarijantan za A i takav da je $\sigma(A|_{\mathcal{J}_-})$ sadržan u zatvorenoj gornjoj poluravni kompleksne ravni (vidite [62, teorem 12.1′]). Matrica $A|_{\mathcal{J}_-}$ ima $\varkappa''_A$ svojstvenih vrijednosti (računatih prema njihovoj algebarskoj višestrukosti) u zatvorenoj gornjoj poluravni i za svojstvenu vrijednost λ matrice $A|_{\mathcal{J}_-}$ (vrijedi $\lambda \neq 0$) postoji odgovarajuća svojstvena funkcija f $(\in \mathcal{J}_-)$ za koju je $[Af,f] \leqslant 0$, tj. $\lambda[f,f] \leqslant 0$. Dakle operator $A|_{\mathcal{K}_2}$ ima najmanje $\varkappa''_A$ svojstvenih vrijednosti sa osobinom navedenom u propoziciji.

Sada ćemo dokazati $\dim(\mathcal{S}_0(A)) \geqslant \varkappa'_A$. Primijenićemo lemu 2.4 na Kreinov prostor $(\mathcal{K}_0,[\cdot,\cdot])$ i njegov konačno dimenzionalan potprostor $\mathcal{S}_0(A)$. Vrijedi dekompozicija (2.2) sa $\mathcal{F} = \mathcal{S}_0(A)$ i odgovarajućim $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}^0$. Napomenimo da $\mathcal{F}^0$ označava izotropni dio potprostora $\mathcal{S}_0(A)$ u $\mathcal{K}_0$. Potprostori $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^\perp$ su invarijantni za A . Zaista, to je očigledno za $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^\perp$. Ako $x \in \mathcal{F}^0$, onda je $[x,y] = 0$ za bilo koji $y \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi $Ax \in \mathcal{F}$ i pošto za bilo koje $y \in \mathcal{F}$ vrijedi $Ay \in \mathcal{F}$ imamo $[Ax,y] = [x,Ay] = 0$ za sve $y \in \mathcal{F}$. Dakle $Ax \in \mathcal{F}^0$. Napomenimo da smo ovdje pokazali da je potprostor $\mathcal{F}^0$ sadržan u izotropnom dijelu potprostora $\mathcal{S}_0(A)$ s obzirom na skalarni produkt $[A\cdot,\cdot]$. Potprostori $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ su invarijantni za A jer vrijedi $\mathcal{F}^0 [\dot{+}] \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^0 [\dot{+}] \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}^\perp$. Na osnovu propozicije II.5.2 iz [47], teorema 1.(v) iz [23] i primjedbe 2.2 $\mathcal{F}^{\perp}$ je nenegativan potprostor prostora $(\mathcal{K}_0,[A\cdot,\cdot])$. Potprostor $(\mathcal{F}_2,[A\cdot,\cdot])$ je pozitivan. Zaista, neka je $x\in\mathcal{F}_2$ takav da je $[Ax,x]=0$. Cauchy-Schwarzova nejednakost za skalarni produkt $[A\cdot,\cdot]$ na $\mathcal{F}_2$ povlači da je $[Ax,y]=0$ $(y\in\mathcal{F}_2)$. Pošto $Ax\in\mathcal{F}_2$ i na potprostoru $\mathcal{F}_2$ skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ ne degeneriše, slijedi $Ax=0$, tj. $x\in\ker(A)$. Kako je $\ker(A)\subseteq\mathcal{S}_0(A)$, imamo $x\perp\mathcal{F}_2$, i odatle $x=0$. Označimo sa $\varkappa'$ i $\varkappa''$ broj negativnih kvadrata skalarnog produkta $[A\cdot,\cdot]$ na $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}^0\dot{+}\mathcal{F}_3$ respektivno. Tada imamo $\varkappa'+\varkappa''=\varkappa'_A$. Očigledno je $\varkappa'\leqslant\dim\mathcal{F}_1$. Vrijedi $\dim\mathcal{F}^0=\dim\mathcal{F}_3$ i prostor $(\mathcal{F}^0,[A\cdot,\cdot])$ je neutralan. Odavde slijedi $\varkappa''\leqslant\dim\mathcal{F}^0$. Zaista, neka je $\mathcal{J}$ izotropni dio prostora $(\mathcal{F}^0+\mathcal{F}_3,[A\cdot,\cdot])$. Tada je $((\mathcal{F}^0+\mathcal{F}_3)/\mathcal{J},[A\cdot,\cdot])$ konačno dimenzionalan Kreinov prostor sa $\varkappa''$ negativnih kvadrata. Njegov potprostor $\mathcal{F}^0/\mathcal{J}=\mathcal{F}^0/(\mathcal{J}\cap\mathcal{F}^0)$ je neutralan (s obzirom na $[A\cdot,\cdot]$) i $\dim((\mathcal{F}^0\dot{+}\mathcal{F}_3)/\mathcal{J})=2\dim\mathcal{F}^0-\dim\mathcal{J}$. Zbog toga je

$$\dim(\mathcal{F}^0/\mathcal{J})=\dim\mathcal{F}^0-\dim(\mathcal{J}\cap\mathcal{F}^0)\leqslant 2\dim\mathcal{F}^0-\dim\mathcal{J}-\varkappa'',$$

$$\dim(\mathcal{F}^0/\mathcal{J})=\dim\mathcal{F}^0-\dim(\mathcal{J}\cap\mathcal{F}^0)\leqslant\varkappa''.$$

Odavde imamo

$$\varkappa''\leqslant\dim\mathcal{F}^0-(\dim\mathcal{J}-\dim(\mathcal{J}\cap\mathcal{F}^0))\leqslant\dim\mathcal{F}^0.$$

Pošto je $\dim\mathcal{S}_0(A)=\dim\mathcal{F}^0+\dim\mathcal{F}_1$, zaključujemo

$$\dim\mathcal{S}_0(A)\geqslant\varkappa''+\varkappa'=\varkappa'_A.$$

Propozicija je dokazana.

LEMA 2.8. Neka je $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor i T hermitski operator u $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. Neka je $\mathcal{J}$ potprostor Kreinovog prostora $\mathcal{K}$ takav da je $(\mathcal{J},[\cdot,\cdot])$ takođe Kreinov prostor, $\mathcal{J}$ je invarijantan za T, operator $T|_{\mathcal{J}}$ je ograničen i $\sigma(T|_{\mathcal{J}})\cap(-\infty,0]=\emptyset$. Tada je $\varkappa_{\pm}(\mathcal{J},[\cdot,\cdot])=\varkappa_{\pm}(\mathcal{J},[T\cdot,\cdot])$. Ako se posljednji uslov zamijeni sa $\sigma(T|_{\mathcal{J}})\cap[0,+\infty)=\emptyset$, onda vrijedi $\varkappa_{\pm}(\mathcal{J},[\cdot,\cdot])=\varkappa_{\mp}(\mathcal{J},[T\cdot,\cdot])$.

DOKAZ. Iz uslova $\sigma(T|_{\mathcal{J}})\cap(-\infty,0]=\emptyset$ slijedi da se Riesz-Dunfordovim funkcionalnim računom može definisati operator $(T|_{\mathcal{J}})^{1/2}$

koji je takođe ograničen hermitski operator na Kreinovom prostoru $(\mathcal{J}, [\cdot,\cdot])$ i $0 \in \rho((T|_{\mathcal{J}})^{1/2})$. Odavde je očigledno $\varkappa_{\pm}(\mathcal{J}, [\cdot,\cdot]) = \varkappa_{\pm}(\mathcal{J}, [T^{1/2}\cdot, T^{1/2}\cdot]) = \varkappa_{\pm}(\mathcal{J}, [T\cdot,\cdot])$. Posljednja tvrdnja leme dobija se iz već dokazane tvrdnje prelaskom na operator $-T$.

PROPOZICIJA 2.9. Vrijedi slijedeća nejednakost

$$\sum_{\lambda<0} \varkappa_{+}(\lambda,A) + \sum_{\lambda>0} \varkappa_{-}(\lambda,A) + \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(A)\\ \mathrm{Im}\lambda>0}} \dim \mathcal{S}_{\lambda}(A) \leq \varkappa_{A} . \tag{2.4}$$

U (2.4) vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $q(0) \neq 0$.

DOKAZ. Ako je $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$, respektivno), onda je veličina $\varkappa_{+}(\lambda,A)$ ($\varkappa_{-}(\lambda,A)$, respektivno) pozitivna ako i samo ako je λ nula polinoma q . Neka su $\lambda_1^-,\ldots,\lambda_k^-$ negativne i $\lambda_1^+,\ldots,\lambda_m^+$ pozitivne nule polinoma q . Neka su Δ_j^- , $j = 1,\ldots,k$ (Δ_j^+ , $j = 1,\ldots,m$, respektivno) konačni, otvoreni, međusobno disjunktni intervali sadržani u $(-\infty,-\varepsilon)$ ($(\varepsilon,+\infty)$, respektivno), za neko $\varepsilon > 0$, za koje vrijedi $\lambda_j^- \in \Delta_j^-$, $j = 1,\ldots,k$ ($\lambda_j^+ \in \Delta_j^+$, $j = 1,\ldots,m$, respektivno). Stavimo

$$\mathcal{K}_j^{(-)} = E(\Delta_j^-)L^2(a,b,r) , \quad \mathcal{K}_i^{(+)} = E(\Delta_i^+)L^2(a,b,r) , \quad j = 1,\ldots,k, \ i = 1,\ldots,m ,$$

i

$$\mathcal{K}' = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{K}_j^{(-)} [\dot{+}] \sum_{j=1}^{m} \mathcal{K}_j^{(+)} [\dot{+}] \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(A)\\ \mathrm{Im}\lambda>0}} (\mathcal{S}_{\lambda}(A) \dot{+} \mathcal{S}_{\lambda^*}(A)) . \tag{2.5}$$

Sume u (2.5) su direktne i ortogonalne s obzirom na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$. Potprostor $\mathcal{K}'$ je ortogonalno dopunjiv u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$. Njegov ortogonalni komplement označimo sa $\mathcal{K}''$. Potprostori $\mathcal{K}'$ i $\mathcal{K}''$ su invarijantni za A . Označimo sa $\varkappa_A'$ ($\varkappa_A''$, respektivno) broj negativnih kvadrata skalarnog produkta $[A\cdot,\cdot]$ na $\mathcal{K}'$ ($\mathcal{K}''\cap\mathcal{D}(A)$, respektivno) . Vrijedi $\varkappa_A' + \varkappa_A'' = \varkappa_A$. Prema tome $\varkappa_A' \leq \varkappa_A$ i ovdje vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $A|_{\mathcal{K}''}$ nenegativan operator u $(\mathcal{K}'', [\cdot,\cdot])$. Neka je τ višestrukost nule kao nule polinoma q . Tada imamo

$$[AA^{\tau}x, A^{\tau}x] \geq 0 \qquad (x \in \mathcal{D}(A^{\tau+1}) \cap \mathcal{K}'') ,$$

i zbog minimalnosti polinoma q , broj τ je minimalan broj sa gornjom osobinom. Dakle, $A|_{\mathcal{K}''}$ je nenegativan operator u $(\mathcal{K}'', [\cdot,\cdot])$ ako i samo ako je $\tau = 0$, tj. $q(0) \neq 0$.

Iz definicije potprostora $\mathcal{K}'$ slijedi

$$\varkappa'_A = \sum_{j=1}^{k} \varkappa_-(\mathcal{K}_j^{(-)}, [A\cdot,\cdot]) + \sum_{j=1}^{m} \varkappa_-(\mathcal{K}_j^{(+)}, [A\cdot,\cdot]) + \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(A)\\ \mathrm{Im}\,\lambda>0}} \dim \mathcal{S}_\lambda(A). \qquad (2.6)$$

Na sličan način kao u dokazu propozicije 2.5(b) primijenjujući lemu 2.4 na Kreinov prostor $(\mathcal{K}_1^{(+)}, [\cdot,\cdot])$ i njegov potprostor $\mathcal{S}_{\lambda_1^+}(A) = \mathcal{F}$ (sa odgovarajućim $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}^0$ iz leme 2.4) dobijamo

$$\varkappa_-(\mathcal{K}_1^{(+)}) = \varkappa_-(\mathcal{F}_1) + \dim \mathcal{F}^0 = \varkappa_-(\lambda_1^+, A) . \qquad (2.7)$$

Pošto su potprostori $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}^0 \dot{+} \mathcal{F}_3$ invarijantni za A i pošto je skalarni produkt $[A\cdot,\cdot]$ pozitivan na $\mathcal{F}_2$, iz dekompozicije (2.2) slijedi

$$\varkappa_-(\mathcal{K}_1^{(+)}, [A\cdot,\cdot]) = \varkappa_-(\mathcal{F}_1, [A\cdot,\cdot]) + \dim \mathcal{F}^0 . \qquad (2.8)$$

U dokazu leme 2.4 vidjeli smo da je $(\mathcal{F}_1, [\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor. Zbog $\mathcal{F} = \mathcal{S}_{\lambda_1^+}(A)$ vrijedi $\sigma(A|_{\mathcal{F}_1}) = \{\lambda_1^+\}$, pa lema 2.8 povlači

$$\varkappa_-(\mathcal{F}_1) = \varkappa_-(\mathcal{F}_1, [A\cdot,\cdot]) . \qquad (2.9)$$

Jednakosti (2.7,8 i 9) daju

$$\varkappa_-(\mathcal{K}_1^{(+)}, [A\cdot,\cdot]) = \varkappa_-(\lambda_1^+, A) .$$

Na isti način dobijamo

$$\varkappa_-(\mathcal{K}_j^{(+)}, [A\cdot,\cdot]) = \varkappa_-(\lambda_j^+, A) , \quad j = 1,\dots,m , \qquad (2.10)$$

i

$$\varkappa_-(\mathcal{K}_j^{(+)}, [A\cdot,\cdot]) = \varkappa_+(\lambda_j^-, A) , \quad j = 1,\dots,k . \qquad (2.11)$$

Zamjenjujući u (2.6) odgovarajuće vrijednosti iz (2.10) i (2.11) dobijamo

$$\varkappa_A \geq \varkappa'_A = \sum_{j=1}^{k} \varkappa_+(\lambda_j^-, A) + \sum_{j=1}^{m} \varkappa_-(\lambda_j^+, A) + \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(A)\\ \mathrm{Im}\,\lambda>0}} \dim \mathcal{S}_\lambda(A) .$$

Propozicija je dokazana.

PRIMJEDBA 2.10. U ovoj primjedbi koristimo oznake iz prethodnog dokaza. Iz dokaza propozicije 2.7 slijedi $\varkappa''_A \leq \dim \mathcal{S}_0(A)$.

Zbog toga imamo

$$\varkappa_A \leqslant \varkappa'_A + \dim \mathcal{S}_0(A) ,$$

pri čemu je $\varkappa'_A$ jednak broju sa lijeve strane u nejednakosti (2.4).

Ako je potprostor ker(A) ortogonalno dopunjiv u $L^2(a,b,r)$, onda je na osnovu korolara II.5.2.3 iz [47] operator $A|_{\mathcal{K}''}$ ne-negativan u Kreinovom prostoru $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$. U ovom slučaju vrijedi $q(0) \neq 0$.

Prema primjedbi 2.6 realan broj $\lambda \neq 0$ pojavljuje se na lijevoj strani nejednakosti (2.4) ako i samo ako je λ svojstvena vrijednost operatora A i postoji odgovarajuća svojstvena funkcija f operatora A za koju je $\lambda[f,f] \leqslant 0$.

Propozicija 2.9 je poopštenje teorema 1.1 iz [55] i teorema 2 iz [54].

2.3. Pošto se spektar operatora A van realne prave sastoji od konačnog broja ($\leqslant 2\varkappa_A$) svojstvenih vrijednosti, propozicija 1.4 povlači da su tačke ζ otvorene gornje poluravni tačke regularnog tipa za operator $\hat{A}$, sa izuzetkom od najviše $\varkappa_A$ tačaka. Izuzev u ovim posebnim tačkama, defektni broj $\dim(\mathcal{R}(\hat{A}-\zeta I)^{(\perp)})$ je konstantan u gornjoj poluravni (označimo ovaj broj sa m_+) . Odgovarajuća izjava vrijedi i za donju poluravan kompleksne ravni sa pripadnim defektnim brojem m_- .

PROPOZICIJA 2.12. Defektni brojevi m_+ i m_- operatora $\hat{A}$ su međusobno jednaki i jednaki su defektnim brojevima operatora $\hat{B}$.

DOKAZ. Neka je ζ tačka regularnog tipa operatora $\hat{A}$ iz gornje poluravni. Tada je $\dim(\mathcal{R}(\hat{A}-\zeta I)^{(\perp)}) = m_+$. Prema propoziciji 1.4 vrijedi $\zeta \in \rho(A)$. Budući da je

$$\dim\big((A-\zeta I)\mathcal{D}(A)/(A-\zeta I)\mathcal{D}(\hat{A})\big) = m_+$$

imamo

$$m_+ = \dim \mathcal{D}(A)/\mathcal{D}(\hat{A}) = \dim \mathcal{D}(B)/\mathcal{D}(\hat{B}) .$$

Prema tome $m_+ < +\infty$ i defektni broj m_+ je jednak defektnom broju zatvorenog simetričnog operatora $\hat{B}$ u $(L^2(a,b,|r|),(\cdot,\cdot))$. Na sličan način pokazuje se da je defektni broj m_- jednak defektnom broju operatora $\hat{B}$. Na osnovu teorema II.4.2 defektni brojevi operatora $\hat{B}$ su jednaki i propozicija je dokazana.

Vrijedi slijedeći analogon teorema II.6.1.

TEOREM 2.13. Rezolventa $R(\lambda,A) = (A-\lambda I)^{-1}$ $(\lambda\in\rho(A))$ bilo kog hermitskog proširenja A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ je integralni operator sa jezgrom $H(\cdot,\cdot,\lambda)$, tj. za klasu ekvivalencije $f\in L^2(a,b,r)$ i $\tilde{f}\in f$ vrijedi

$$\int_a^b H(\cdot,s,\lambda)\tilde{f}(s)r(s)ds\in R(\lambda,A)f .$$

Jezgro $H(\cdot,\cdot,\lambda)$ zadovoljava uslove

$$\int_a^b |H(x,s,\lambda)|^2|r(s)|\,ds < +\infty , \qquad \int_a^b |H(x,s,\lambda)|^2|r(x)|\,dx < +\infty .$$

Ako operator $\hat{A}$ ima indeks defekta $(2n,2n)$ jezgro $H(\cdot,\cdot,\lambda)$ definiše Hilbert-Schmidtov operator u prostoru $L^2(a,b,r)$, tj. vrijedi

$$\int_a^b\int_a^b |H(x,s,\lambda)|^2|r(x)|\,|r(s)|\,dxds < +\infty .$$

Umjesto kompletnog dokaza ovog teorema napomenimo da je teorem očigledan ako $0\in\rho(A)$ i $\lambda = 0$, pošto je u tom slučaju $A^{-1} = B^{-1}J$ i iz teorema II.6.1 slijedi da integralni operatori A^{-1} i B^{-1} imaju jednaka jezgra. Slučaj kada $\lambda_o\in\rho(A)\cap\mathbb{R}$ može se svesti na upravo spomenuti specijalan slučaj, jer je hermitski operator $A-\lambda_o I$ u $L^2(a,b,r)$ pridružen diferencijalnoj jednačini $\ell(\tilde{f}) - \lambda_o r\tilde{f} = \lambda r\tilde{f}$ i vrijedi $0\in\rho(A-\lambda_o I)$. Nije poznato da li se i dokaz teorema 2.13 može svesti na teorem II.6.1. Teorem 2.13 dokazuje se na sličan način kao teorem II.6.1 , odnosno teorem 1 u [56, §19]. Da bi ilustrovali neke od razlika koje se pojavljuju u dokazu teorema 2.13 u odnosu na dokaz teorema 1 u [56, §19] ističemo jedan korak ovog dokaza (uporediti sa [56, str.219-220]) .

Jednakost

$$g = R(\lambda,A)f , \quad f\in L^2(a,b,r) , \quad \lambda\in\rho(A)$$

je ekvivalentna sa

$$Ag - \lambda g = f .$$

Imamo $Ag \ni u$ ako i samo ako je $\ell(\tilde{g}) = r\tilde{u}$ za neko $\tilde{u}\in u$. Zbog toga jednakost $u - \lambda g = f$, tj. jednakost $r\tilde{u} - \lambda r\tilde{g} = r\tilde{f}$ daje

$$\ell(\bar{g}) - \lambda r\bar{g} = r\tilde{f}\ , \quad \text{za neko}\ \tilde{f}\in f\ . \tag{2.12}$$

Sada primjenjujemo rezultate iz §16.4 u [56], pri čemu je u relaciji (24) iz [56, §16.4] f zamijenjeno sa $r\tilde{f}$ i $\ell(y)$ je zamijenjeno sa $\ell(\bar{g}) - \lambda r\bar{g}$, da bi dobili opšte rješenje jednačine (2.12).

PRIMJEDBA 2.14. Ako je indeks defekta operatora $\hat{A}$ jednak $(2n,2n)$, onda je, prema teoremu 2.13, rezolventa bilo kog hermitskog proširenja A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ kompaktan operator. U ovom slučaju operator A ima diskretan spektar. U regularnom slučaju jezgro $H(\cdot,\cdot,\lambda)$ možemo odabrati tako da su funkcije $H_{jk}(\cdot,\cdot,\lambda)$, $j,k = 0,1,\ldots,n-1$ neprekidne na $[a,b]\times[a,b]$.

PROPOZICIJA 2.15. Pretpostavimo da za svaku singularnu rubnu tačku a ili b problema (1.1) postoji $a'\in(a,b)$ ili $b'\in(a,b)$ takvi da skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ (vidite (P1)) ima konačan broj negativnih kvadrata na skupu svih klasa ekvivalencije f iz $\mathcal{D}(\hat{A}_0)$ za koje funkcija $\bar{f}$ uzima vrijednost nula van intervala (a,a') ili (b',b), i takvo da je težinska funkcija r pozitivna gotovo svuda na (a,a') ili (b',b), respektivno. Tada je negativni spektar bilo kog hermitskog proširenja A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ diskretan sa jedinom tačkom nagomilavanja $-\infty$.

DOKAZ. Na osnovu propozicija 1.1(b), 1.5(b) i teorema 2.1, bilo koje hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ je definitibilan operator. Zbog jednostavnosti pretpostavićemo da je samo b singularna rubna tačka problema (1.1). Ako je a ili ako su i a i b singularne rubne tačke postupa se analogno. S obzirom na primjedbu II.3.6 imamo

$$L^2(a,b,r) = L^2(a,b',r)\,[+]\,L^2(b',b,r)\ ,$$

gdje je suma ortogonalna i u $L^2(a,b,r)$ i u $L^2(a,b,|r|)$. Neka je B' (B'', respektivno) Friedrichsovo proširenje operatora $\hat{B}_{\Delta'}$ ($\hat{B}_{\Delta''}$, respektivno). Ovdje je $\Delta' = [a,b']$, $\Delta'' = [b',b)$. Stavimo $A' = JB'$ i $A'' = JB''$. Prostor $L^2(b',b,r)$ je Hilbertov prostor i A'' je hermitski operator u ovom Hilbertovom prostoru. Kako skalarni produkt $\{\cdot,\cdot\}$ ima konačan broj negativnih kvadrata na skupu klasa ekvivalencije $f\in\mathcal{D}(\hat{A}_0)$ za koje je funkcija $\bar{f}$ jednaka nuli van intervala (b',b), to i skalarni produkt

$[\hat{A}_{\Delta''}\cdot,\cdot]$ na $\mathcal{D}(\hat{A}_{\Delta''})$ ima konačan broj negativnih kvadrata. Prema lemi 1.3 odavde zaključujemo da skalarni produkt $[A''\cdot,\cdot]$ na $\mathcal{D}(A'')$ ima konačan broj negativnih kvadrata. Zbog toga je esencijalni spektar operatora A sadržan u $[0,+\infty)$. Problem (1.1) je regularan na intervalu $[a,b']$. Na osnovu primjedbi 1.2 i 1.6 i teorema 2.1, operator A' je definitibilan u $L^2(a,b',r)$. Prema primjedbi 2.14, spektar operatora A' je diskretan. Operator $A' \oplus A''$ je definitibilan u $L^2(a,b,r)$ i njegov negativni spektar je diskretan sa jedinom tačkom nagomilavanja $-\infty$. Zbog toga je $\varkappa_-(0,A' \oplus A'') < +\infty$. Neka je A bilo koje hermitsko proširenje operatora $\hat{A}_0$ u $L^2(a,b,r)$. Tada postoji $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A' \oplus A'')$ i za takvo λ imamo

$$\dim((A - \lambda I)^{-1} - (A' \oplus A'' - \lambda I)^{-1}) < +\infty .$$

Na osnovu argumanata korištenih u dokazu teorema 1 u [26] zaključujemo da je $\varkappa_-(0,A) < +\infty$. Operatori A i $A' \oplus A''$ imaju isti esencijalni spektar. Prema tome negativni spektar operatora A je diskretan. Samo 0 i $-\infty$ mogu biti tačke nagomilavanja negativnog spektra operatora A . Budući da vrijedi $\varkappa_-(0,A) < +\infty$, nula nije tačka nagomilavanja negativnog spektra. Propozicija je dokazana.

Ovakva struktura spektra za diferencijalni operator drugog reda data je u [53, lema 1] , pod strožim pretpostavkama o koeficijentima.

PROPOZICIJA 2.16. ([56, §24, teorem 3]) Pretpostavimo da postoji $c \in (a,b)$ tako da vrijedi

$$p_1 \geqslant 0, \ldots, p_{n-1} \geqslant 0 , \quad r \geqslant 0 \quad \text{gotovo svuda na} \quad (c,b) .$$

Neka je a regularna rubna tačka problema (1.1) i

$$\lim_{x \to b} p_n(x)/r(x) = t > 0 .$$

Tada se u intervalu $(-\infty,t)$ može nalaziti samo diskretni spektar bilo kog hermitskog proširenja A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ i jedine tačke nagomilavanja dijela spektra operatora A u $(-\infty,t)$ su $-\infty$ i t .

DOKAZ. Za $\varepsilon > 0$ postoji $b' \in (c,b)$ takvo da

$$p_n(x) > t - \varepsilon \quad \text{za gotovo sve} \quad x \in (b',b) . \tag{2.13}$$

Nadalje koristimo oznake iz dokaza propozicije 2.15 i razmatramo operatore A' i A'' definisane u tom dokazu. Prema (2.13) za $f \in \mathcal{D}(\hat{A}_{o,\Delta''})$ i $g = \hat{A}_{o,\Delta''}f$, imamo

$$(\hat{A}_{o,\Delta''}f,f)_{\Delta''} = [\hat{A}_{o,\Delta''}f,f] = \int_{b'}^{b} \tilde{g}\bar{f}^{*}r\,dx = \int_{b'}^{b} \ell_{\Delta''}(\bar{f})\bar{f}^{*}dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \int_{b'}^{b} p_j |\bar{f}^{(n-j)}|^2 dx \geq \int_{b'}^{b} (p_n/r)|\bar{f}|^2 r\,dx$$

$$\geq (t-\varepsilon)(f,f)_{\Delta''} . \tag{2.14}$$

Odavde slijedi da je $\sigma(A'') \subseteq [t-\varepsilon,+\infty)$. Prema tome operator $A' \oplus A''$ ima diskretan spektar u intervalu $(-\infty, t-\varepsilon)$. Pošto operatori A i $A' \oplus A''$ imaju isti neprekidni dio spektra, operator A ima diskretan spektar u $(-\infty, t-\varepsilon)$ sa jedinom tačkom nagomilavanja $-\infty$. Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je spektar operatora A u intervalu $(-\infty,t)$ diskretan sa jedinim tačkama nagomilavanja $-\infty$ i t. Napomenimo da nejednakost (2.14) povlači da je skalarni produkt $\{\cdot\,,\cdot\}$ pozitivan na skupu svih klasa ekvivalencije f iz $\mathcal{D}(\hat{A}_o)$ za koje funkcija $\bar{f}$ uzima vrijednost nula van intervala (b',b). Na osnovu propozicije 2.15, operator A je definitibilan. Propozicija je dokazana.

KOROLAR 2.17. Pretpostavimo da su zadovoljeni uslovi propozicije 2.16 sa $t = +\infty$. Tada bilo koje hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ ima diskretan spektar sa jedinom tačkom nagomilavanja ∞.

Koristeći metod iz prethodna dva dokaza i rezultate o strukturi spektra diferencijalnih operatora u slučaju $r \equiv 1$ (vidite [56, §24.1]) moguće je dobiti dalje informacije o spektru operatora A.

III.3. Regularnost kritične tačke beskonačno definitibilnih diferencijalnih operatora

Neka je $\mathcal{W}$ otvoren skup definisan u odjeljku II.2. U ovom odjeljku, kao i u osnovnom dijelu odjeljka II.7, smatramo da je skup $\mathcal{W}$ unija konačno mnogo međusobno disjunktnih otvorenih intervala $I_j = (a_j,b_j)$, $j = 1,\dots,s$. Bez smanjenja opštosti razmatranja možemo pretpostaviti da je $a < a_j < b_j < b$, $j = 1,\dots,s$.

Pored toga smatramo da je problem (1.1) regularan na $[a,b]$.

Tačka $x \in (a,b)$ naziva se <u>tačka promjene</u> (znaka) težinske funkcije r ako $x \in Cl(\Delta_+) \cap Cl(\Delta_-)$.

Za interval $I_j = (a_j, b_j)$, $j \in \{1,2,\ldots,s\}$ kažemo da je <u>interval promjene</u> (znaka) težinske funkcije r ako a_j (b_j , respektivno) pripada $Cl(\Delta_+)$ i b_j (a_j , respektivno) pripada $Cl(\Delta_-)$.

Za tačku promjene x_o (interval promjene $I_o = (a_o, b_o)$, respektivno) kažemo da je <u>n-prosta</u> (<u>n-prost</u>, respektivno) ako postoji otvoren interval Δ_o koji sadrži x_o (strogo sadrži I_o , respektivno) takav da za gotovo sve $x \in \Delta_o$ vrijedi reprezentacija

$$r(x) = \begin{cases} -|x - x_o|^{\tau} \varrho_-(x) , & x < x_o \\ |x - x_o|^{\tau} \varrho_+(x) , & x > x_o \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\left(r(x) = \begin{cases} -|x - a_o|^{\tau} \varrho_-(x) , & x < a_o \\ 0 , & x \in (a_o, b_o) , \text{ resp.} \\ |x - b_o|^{\tau} \varrho_+(x) , & x > b_o \end{cases} \right) \tag{3.1'}$$

pri čemu je $\tau > -1/2$, $\varrho_+(x) \neq 0$ za sve $x \in \Delta_o \cap [x_o, +\infty)$ ($x \in \Delta_o \cap [b_o, +\infty)$, respektivno), ϱ_+ je iz klase funkcija C^n na $\Delta_o \cap [x_o, +\infty)$ ($\Delta_o \cap [b_o, +\infty)$, resp.), $\varrho_-(x) \neq 0$ za sve $x \in \Delta_o \cap (-\infty, x_o]$ ($x \in \Delta_o \cap (-\infty, a_o]$, resp.) , ϱ_- je iz klase funkcija C^n na $\Delta_o \cap (-\infty, x_o]$ ($\Delta_o \cap (-\infty, a_o]$, resp.) i ako je $n > 1$ za izvode sa jedne strane u tački x_o (tačkama a_o, b_o , resp.) , imamo

$$\varrho'_{\pm}(x_o) = \ldots = \varrho_{\pm}^{(n-1)}(x_o) = 0$$

$$(\varrho'_-(a_o) = \ldots = \varrho_-^{(n-1)}(a_o) = \varrho'_+(b_o) = \ldots = \varrho_+^{(n-1)}(b_o) = 0 \text{ , resp. }) .$$

TEOREM 3.1. Pretpostavljamo da su zadovoljeni slijedeći uslovi:

(1) Operator $\hat{A}_o$ zadovoljava uslove (P1) i (P2) .

(2) Težinska funkcija r ima konačan broj tača ka i intervala promjene koji su svi n-prosti.

(3) Postoji $\delta > 0$ takvo da vrijedi

$$0 < \inf_{\substack{|x-x_0|<\delta \\ x\in(a,b)}} p_0(x) \leq \sup_{\substack{|x-x_0|<\delta \\ x\in(a,b)}} p_0(x) < +\infty ,$$

pri čemu je x_0 bilo koja tačka promjene ili rubna tačka intervala promjene težinske funkcije r .

Tada vrijedi $\infty \notin c_s(A)$ ako je ispunjen jedan od slijedećih uslova

(a) Hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}$ određeno je separiranim rubnim uslovima oblika (II.5.3) tj. svaki od rubnih uslova u (II.5.3) uključuje samo jednu od rubnih tačaka a i b .

(b) A je proizvoljno hermitsko proširenje operatora $\hat{A}$ i vrijedi $a,b \in \mathrm{Cl}(\Delta_+)$ ili $a,b \in \mathrm{Cl}(\Delta_-)$.

DOKAZ. 1. Teorem 2.1 povlači da je bilo koje hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$ definitibilan operator. Mi ćemo pokazati da za operator A (koji ispunjava uslov (a) ili (b) ovog teorema) u prostoru $L^2(a,b,r)$ postoji pozitivan ograničen operator W takav da $0 \in \rho(W)$ i $W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$. Tada propozicija I.3.5 daje tvrdnju teorema. Konstrukcija operatora W data u ovom dokazu skicirana je u primjedbi I.3.7.

2. Pretpostavimo da je ukupan broj tačaka i intervala promjene znaka funkcije r jednak ν . Neka su $\Delta_1,\ldots,\Delta_\nu$ međusobno disjunktni intervali , $(a,b) = \bigcup_{j=1}^{\nu} \Delta_j$, interval Δ_j $(j = 1,\ldots,\nu)$ sadrži u svojoj unutrašnjosti jednu i samo jednu tačku promjene znaka ili zatvorenje intervala promjene znaka funkcije r . S obzirom na primjedbu II.3.6 imamo

$$L^2(a,b,r) = L^2(\Delta_1,r) [\dot{+}] \ldots [\dot{+}] L^2(\Delta_\nu,r) ,$$

pri čemu je suma ortogonalna i u $L^2(a,b,r)$ i u $L^2(a,b,|r|)$.

Neka je $\delta > 0$ iz uslova (3) teorema takvo da za interval Δ_0 iz (3.1) ((3.1′), respektivno) za bilo koju tačku promjene x_0 (interval promjene I_0 , resp.) možemo uzeti interval $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $((a_0-\delta,b_0+\delta)$, respektivno) i takvo da tačke $x_0-\delta,x_0+\delta$ $(a_0-\delta,b_0+\delta$, resp.) imaju pozitivnu udaljenost od skupa $\mathcal{W}$ i ako tačka promjene $x_0 \in \Delta_j$ (interval promjene $I_0 \subseteq \Delta_j$) , $j \in \{1,\ldots,\nu\}$, onda je interval $\mathrm{Cl}(\Delta_0)$ sadržan u unutrašnjosti intervala Δ_j . Neka je $\Delta \in \{\Delta_1,\ldots,\Delta_\nu\}$ i $\Delta = (\alpha,\beta)$ sadrži tačku promjene funkcije r . Da bi pojednostavili konstrukciju operatora W pretpostavimo da je tačka promjene nula i da je funkcija r negativna na $(-\delta,0)$ i pozitivna na $(0,\delta)$. Označimo sa $\mathcal{D}_\Delta$ skup svih funkcija $y\in \mathbb{L}^2(\Delta,r)$ za koje su funkcije $y,y',\dots,y^{(n-1)}$ apsolutno neprekidne na $[\alpha,\beta]$ i

$$\int_\alpha^\beta p_0|y^{(n)}|^2dx < +\infty .$$

Zbog jednostavnosti stavljamo $\mathcal{D}_\Delta = \mathcal{D}$. U daljem ćemo konstruisati operatore $X_\pm$, $Y_\pm$ na $\mathbb{L}^2(\Delta,r)$ takve da $X_\pm\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}$, $Y_\pm\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}$ i koji imaju osobine (b), (c) i (d) iz primjedbe I.3.7. U tom cilju izaberimo $2n$ međusobno različitih tačaka $t_1,\dots,t_{2n}\in(1,2)$ i definišimo funkcije

$$h_j(x) \stackrel{\mathrm{i}}{=} t_j^{-\tau}\rho_-(x)/\rho_+(-t_jx) \qquad (x\in[-\delta/2,0),\ j=1,\dots,2n) .$$

Napomenimo da je $h_j(x) = -r(x)/r(-t_jx)$, $j=1,\dots,2n$. Neka je, dalje $\varphi\in C^n(\Delta)$ funkcija koja uzima vrijednost 1 na nekoj okolini tačke nula, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ i $\operatorname{supp}\varphi\subseteq(-\delta/2,\delta/2)$. Sada definišemo operatore X_+ i Y_+ na $\mathbb{L}^2(\Delta,r)$

$$(X_+u)(x) = \begin{cases} \varphi(x)\sum\limits_{j=1}^{2n}\alpha_jt_ju(-t_jx), & x\in(\alpha,0)\\ u(x), & x\in(0,\beta), \end{cases}$$

$$(Y_+u)(x) = \begin{cases} 0 & x\in(\alpha,0)\\ u(x)+\sum\limits_{j=1}^{2n}\alpha_j(\varphi h_ju)(-x/t_j), & x\in(0,\beta) \end{cases}$$

pri čemu su $\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}$ realni brojevi koje treba odrediti.

Stavimo

$$c_1 = \max\left\{|h_j^{(k)}(x)| : x\in[-\delta/2,0),\ k=0,1,\dots,n,\ j=1,\dots,2n\right\},$$

$$c_2 = \max\left\{|\varphi^{(j)}(x)| : x\in\Delta,\ j=0,1,\dots,n\right\},$$

$$c_3 = \sup\left\{p_0(x) : x\in[-\delta,\delta]\right\}/\inf\left\{p_0(x) : x\in[-\delta,\delta]\right\}.$$

3. Neka je $u\in\mathbb{L}^2(\Delta,r)$ takvo da su funkcije $u,u',\dots,u^{(n-1)}$ apsolutno neprekidne na $[\alpha,\beta]$. Brojeve $\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}$ izabraćemo

tako da funkcije $(X_+u)^{(k)}, (Y_+u)^{(k)}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, budu apsolutno neprekidne na $[\alpha,\beta]$. Iz definicije operatora X_+ imamo

$$(X_+u)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\varphi^{(k-i)}(x)\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j(-t_j)^i u^{(i)}(-t_j x) ,$$

$$(x\in(\alpha,0) \ , \ k = 0,1,\ldots,n-1,n) ,$$

$$(X_+u)^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) \qquad (x\in(0,\beta) \ , \ k = 0,1,\ldots,n-1,n) .$$

Pošto je funkcija $(X_+u)^{(k)}$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ apsolutno neprekidna na intervalima $[\alpha,0]$ i $[0,\beta]$, ova funkcija je apsolutno neprekidna na $[\alpha,\beta]$ ako i samo ako je ona neprekidna u nuli. Jednakost

$$(X_+u)^{(k)}(0_-) = (X_+u)^{(k)}(0_+) \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1)$$

je ekvivalentna sa

$$\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j(-t_j)^k = 1 \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1) ,$$

tj. sa

$$\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j^{k+1} = (-1)^k \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1) . \tag{3.2}$$

Iz definicije operatora Y_+ imamo

$$(Y_+u)^{(k)}(x) = 0 \qquad (x\in(\alpha,0) \ , \ k = 0,1,\ldots,n-1,n)$$

$$(Y_+u)^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j(-1)^k t_j^{-k}(\varphi h_j u)^{(k)}(-x/t_j) ,$$

$$(x\in(0,\beta) \ , \ k = 0,1,\ldots,n-1,n) .$$

U okolini tačke nula, gdje su svi izvodi funkcije φ jednaki nuli, imamo

$$(Y_+u)^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j(-1)^k t_j^{-k}\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}h_j^{(i)}u^{(k-i)}\Big)(-x/t_j)$$

i pošto su sve funkcije $h_j^{(i)}$, $j = 1,\ldots,2n$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, neprekidne na $[-\delta/2,0)$ i $\lim_{x\uparrow 0} h_j^{(i)}(x) = 0$, $j = 1,\ldots,2n$, $i = 1,\ldots,n-1$ dobijamo

$$\lim_{x\downarrow 0}(Y_+u)^{(k)}(x) = u^{(k)}(0_+) + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j(-1)^k t_j^{-k}u^{(k)}(0_-)h_j(0_-) .$$

Odavde zaključujemo da su funkcije $(Y_+u)^{(k)}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ apsolutno neprekidne na $[\alpha,\beta]$ ako i samo ako

$$\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j(-1)^k t_j^{-k}h_j(0_-) = -1 \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1) .$$

Pošto je $h_j(0_-) = t_j^{-\tau}\rho_-(0)/\rho_+(0)$, posljednja relacija je ekvivalentna sa

$$\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j^{-k-\tau} = (-1)^{k+1}\rho_+(0)/\rho_-(0) \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1) . \quad (3.3)$$

Jednakosti u (3.2) i (3.3) čine sistem linearnih jednačina sa nepoznatim $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}$. Determinanta ovog sistema

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{2n} \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \cdots & t_{2n}^n \\ t_1^{-\tau} & t_2^{-\tau} & \cdots & t_{2n}^{-\tau} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1^{-n+1-\tau} & t_2^{-n+1-\tau} & \cdots & t_{2n}^{-n+1-\tau} \end{vmatrix}$$

je različita od nule, pa su $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}$ određeni jednoznačno sa (3.2) i (3.3). U daljem smatramo da $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}$ zadovoljavaju jednačine u (3.2) i (3.3). Prema tome, sa ovako odabranim $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}$, funkcije $(X_+u)^{(k)}$, $(Y_+u)^{(k)}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ su apsolutno neprekidne na $[\alpha,\beta]$.

Sada ćemo dokazati da $u^{(n)}\in L^2(\Delta,p_o)$ povlači $(X_+u)^{(n)}\in L^2(\Delta,p_o)$. Vrijedi

$$\int_\Delta |(X_+u)^{(n)}(x)|^2 p_o(x)dx = \int_0^\beta |u^{(n)}(x)|^2 p_o(x)dx$$

$$+ \int_\alpha^0 \Big|\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\varphi^{(n-i)}(x)\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j(-t_j)^i u^{(i)}(-t_j x)\Big|^2 p_o(x)\, dx .$$

Prvi sabirak na desnoj strani posljednje jednakosti je konačan. Drugi sabirak je ograničen sa

$$2n(n+1)\int_{\alpha}^{0} p_o(x)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 |\varphi^{(n-1)}(x)|^2 \sum_{j=0}^{2n}|\alpha_j|^2 t_j^{2(n+1)} |u^{(i)}(-t_j x)|^2 dx$$

$$\leqslant 2n(n+1)c_2^2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{2n}\binom{n}{i}^2|\alpha_j|^2 t_j^{2(i+1)}\int_{-\delta/2}^{0} p_o(x)|u^{(i)}(-t_j x)|^2 dx .$$

Budući da je funkcija p_o ograničena na $[-\delta,\delta]$ imamo

$$\int_{-\delta/2}^{0} p_o(x)|u^{(i)}(-t_j x)|^2 dx < +\infty \qquad (i = 0,1,\dots,n-1 \ , \ j = 1,2,\dots,2n$$

Pored toga vrijedi

$$\sum_{j=1}^{2n}\int_{-\delta/2}^{0} p_o(x)|u^{(n)}(-t_j x)|^2 dx = \sum_{j=1}^{2n}\int_{-\delta/2}^{0} p_o(-t_j x)|u^{(n)}(-t_j x)|^2 \frac{p_o(x)}{p_o(-t_j x)}dx$$

$$\leqslant c_3\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}\int_{0}^{\delta} p_o(x)|u^{(n)}(x)|^2 dx < +\infty .$$

Dakle $\int_{\Delta}|(X_+u)^{(n)}|^2 p_o dx < +\infty$.

Na sličan način se dokazuje da je

$$\int_{\Delta}|(Y_+u)^{(n)}|^2 p_o dx < +\infty \quad \text{ako je} \quad \int_{\Delta}|u^{(n)}|^2 p_o dx < +\infty .$$

Ovim je dokazano $X_+\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}$ i $Y_+\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}$.

4. Operator X_+ je ograničen u $\mathbb{L}^2(\Delta,|r|)$. Za $u\in\mathbb{L}^2(\Delta,|r|)$ sa $\|u\|_{\Delta}$ označimo normu u prostoru $\mathbb{L}^2(\Delta,|r|)$, tj. $\|u\|_{\Delta}^2 = \int_{\Delta}|u|^2|r|dx$. Vrijedi

$$\|X_+u\|_{\Delta}^2 = \int_{\Delta}|(X_+u)(x)|^2|r(x)|dx = \int_{0}^{\beta}|u(x)|^2|r(x)|dx$$

$$+ \int_{\alpha}^{0}\Big|\varphi(x)\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j u(-t_j x)\Big|^2|r(x)|dx$$

$$\leqslant \|u\|_{\Delta}^2 + 2n\int_{\alpha}^{0}|\varphi(x)|^2\Big(\sum_{j=1}^{2n}|\alpha_j|^2 t_j^2|u(-t_j x)|^2\Big)|r(x)|dx$$

$$\leqslant \|u\|_{\Delta}^2 + 2n\sum_{j=1}^{2n}|\alpha_j|^2 t_j^2\int_{-\delta/2}^{0}|u(-t_j x)|^2|r(-t_j x)|\,|h_j(x)|dx$$

$$\leq \|u\|_\Delta^2 + 2nc_1 \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j|^2 t_j^2 \int_{-\delta/2}^{0} |u(-t_j x)|^2 |r(-t_j x)|\, dx$$

$$\leq \|u\|_\Delta^2 + 2nc_1 \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j|^2 t_j \int_0^{\delta} |u(x)|^2 |r(x)|\, dx$$

$$\leq (1 + 2nc_1 \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j|^2 t_j) \|u\|_\Delta^2 .$$

Analogno se pokazuje da je operator Y_+ ograničen u prostoru $\mathbb{L}^2(\Delta, |r|)$. Zaista,

$$\|Y_+ u\|_\Delta^2 \leq 2\int_0^{\beta} |u(x)|^2 |r(x)|\, dx + 2\int_0^{\beta} \Big|\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j (\varphi h_j u)(-x/t_j)\Big|^2 |r(x)|\, dx$$

$$\leq 2\|u\|_\Delta^2 + 4n \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j|^2 \int_0^{\delta} |(\varphi h_j u)(-x/t_j)|^2 |r(x)|\, dx$$

$$\leq 2\|u\|_\Delta^2 + 4n \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j|^2 t_j \int_{-\delta}^{0} |\varphi(x)|^2 |u(x)|^2 |h_j(x)| \frac{\rho_-(x)}{t_j^{\tau} \rho_+(-t_j x)} |r(-t_j x)|\, dx$$

$$\leq 2\|u\|_\Delta^2 + 4nc_1 \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j|^2 t_j \int_{-\delta}^{0} |u(x)|^2 |r(x)|\, dx$$

$$\leq (2 + 4nc_1 \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j|^2 t_j) \|u\|_\Delta^2 .$$

Pošto je $\operatorname{supp} \varphi \subseteq (-\delta/2, \delta/2) \subseteq (\alpha, \beta) \setminus \mathcal{W}$ imamo

$$X_+ u, Y_+ u \in O_{|r|} \in L^2(\Delta, r) \quad \text{za sve} \quad u \in O_{|r|} \in L^2(\Delta, |r|) .$$

Zbog toga operatore X_+ i Y_+ možemo smatrati definisanim i u Kreinovom prostoru $L^2(\Delta, r)$. Tada za $f \in L^2(\Delta, r)$ imamo

$$X_+ f := h \quad \text{ako i samo ako} \quad X_+ \tilde{f} \in h \quad \text{za neko (a time i za svako)} \ \tilde{f} \in f$$

i

$$Y_+ f := g \quad \text{ako i samo ako} \quad Y_+ \tilde{f} \in g \quad \text{za neko (a time i za svako)} \ \tilde{f} \in f .$$

Očigledno je da su operatori X_+ i Y_+ ograničeni u $L^2(\Delta, |r|)$.

5. Restrikcija J_Δ fundamentalne simetrije J na Kreinov prostor $L^2(\Delta, r)$ je fundamentalna simetrija na ovom Kreinovom prostoru i odgovarajuća fundamentalna dekompozicija je

$$L^2(\Delta,r) = L^2(\alpha,0,r) [+] L^2(0,\beta,r) ,$$

pri čemu $L^2(\alpha,0,r)$ i $L^2(0,\beta,r)$ smatramo potprostorima prostora $L^2(\Delta,r)$ u smislu primjedbe II.3.6. Potprostor $L^2(\alpha,0,r)$ je uniformno negativan, a potprostor $L^2(0,\beta,r)$ je uniformno pozitivan potprostor Kreinovog prostora $L^2(\Delta,r)$. Iz definicije operatora X_+ očigledno je da vrijedi

$$X_+f = f \quad \text{za sve} \quad f \in L^2(0,\beta,r)$$
$$X_+f = 0_{|r|} \in L^2(\Delta,r) \quad \text{za sve} \quad f \in L^2(\alpha,0,r) .$$

Dakle operator X_+ ima osobinu (c) iz primjedbe I.3.7.

6. Sa * označimo adjungovanje operatora u Hilbertovom prostoru $L^2(\Delta,|r|)$ u odnosu na skalarni produkt $(\cdot,\cdot)_\Delta$. Vrijedi jednakost

$$X_+ = Y_+^* J . \tag{3.4}$$

Zaista, za $f,g \in L^2(\Delta,|r|)$ imamo

$$(X_+f,g)_\Delta = \int_\Delta X_+\tilde{f}\tilde{g}^*|r|\,dx = \int_0^\beta \tilde{f}\tilde{g}^*|r|\,dx$$
$$+ \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j \int_\alpha^0 \varphi(x)\tilde{f}(-t_jx)\tilde{g}^*(x)\,|r(x)|\,dx \tag{3.5}$$

i

$$(f,J_\Delta Y_+g)_\Delta = \int_\Delta \tilde{f}(x)(Y_+\tilde{g})^*(x)r(x)dx$$
$$= \int_0^\beta \tilde{f}(x)\tilde{g}^*(x)r(x)dx + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j \int_0^\beta \tilde{f}(x)(\varphi h_j\tilde{g})^*\left(-\frac{x}{t_j}\right)r(x)dx$$
$$= \int_0^\beta \tilde{f}\tilde{g}^*|r|\,dx + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j \int_\alpha^0 \tilde{f}(-t_jx)\varphi(x)\tilde{g}^*(x)\,|r(x)|\,dx . \tag{3.6}$$

Upoređujući jednakosti (3.5) i (3.6) vidimo da vrijedi (3.4), tj. operatori X_+ i Y_+ zadovoljavaju uslov (d) iz primjedbe I.3.7.

7. Na potpuno analogan način, zamjenjujući uloge intervala $(\alpha,0)$ i $(0,\beta)$ u definiciji operatora X_+ i Y_+, definišemo operatore X_- i Y_- koji imaju osobinu $X_-\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ i $Y_-\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ i osobine (b),(c) i (d) iz primjedbe I.3.7. U definiciji operatora

Y_- stavljamo

$$h_j(x) = t_j^{-\tau}\rho_+(x)/\rho_-(-t_jx) \qquad (\, x\in(0,\delta/2]\, ,\ j = 1,\dots,2n)\, .$$

Napomenimo da je tada $h_j(x) = -r(x)/r(-t_jx)$, $x\in(0,\delta/2]$, $j = 1,\dots,2n$. Sve navedene osobine operatora X_- i Y_- dokazuju se analogno kao za operatore X_+ i Y_+ , s tim da treba uzeti drugačiju konstantu c_1 i brojeve $\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}$ treba odrediti iz sistema linearnih jednačina (3.2) i (3.3) pri čemu u (3.3) brojevi $\rho_+(0)$ i $\rho_-(0)$ mijenjaju mjesta. Dokažimo da vrijedi (d) iz primjedbe I.3.7. Imamo

$$(X_-f,g)_\Delta = \int_\alpha^0 \tilde f(x)\tilde g^*(x)\,|r(x)|\,dx + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j\int_0^\beta \varphi(x)\tilde f(-t_jx)\tilde g^*(x)\,|r(x)|\,dx$$

i

$$\begin{aligned}(f,J_\Delta Y_-g)_\Delta &= \int_\Delta \tilde f(x)(Y_-\tilde g)^*(x)r(x)dx\\
&= \int_\alpha^0 \tilde f(x)\tilde g^*(x)r(x)dx + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j\int_\alpha^0 \tilde f(x)(\varphi h_j\tilde g)^*(-x/t_j)r(x)dx\\
&= \int_\alpha^0 \tilde f\tilde g^* r dx + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j\int_0^\beta \varphi(x)\tilde f(-t_jx)\tilde g^*(x)(-r(x))dx\\
&= -\int_\alpha^0 \tilde f\tilde g^*|r|dx - \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j\int_0^\beta \varphi(x)\tilde f(-t_jx)\tilde g^*(x)\,|r(x)|\,dx\, .\end{aligned}$$

Upoređujući posljednje dvije jednakosti vidimo da vrijedi

$$X_- = -Y_-^*J_\Delta\, .$$

Na kraju stavljamo

$$W_\Delta := Y_+X_+ - Y_-X_-\, .$$

Operator W_Δ je ograničen u $L^2(\Delta,|r|)$. Na isti način kao u primjedbi I.3.7 dokazuje se da je W_Δ pozitivan operator u Kreinovom prostoru $L^2(\Delta,r)$ i da vrijedi $0\in\rho(W_\Delta)$. Očigledno je da vrijedi $W_\Delta\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}$. Prema definiciji operatora X_+ i Y_+ imamo

$$(Y_+X_+u)(x) = 0\, , \qquad x\in(\alpha,0)$$

i

$$(Y_+X_+u)(x) = u(x) + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j(\varphi^2h_j)(-x/t_j)\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k t_k u(t_k x/t_j),\ (x\in(0,\beta)).\quad(3.7)$$

Analogne formule vrijede za operator Y_-X_-. Dakle

$$(W_\Delta u)(x) = \begin{cases} -(Y_-X_-u)(x)\ , & x\in(\alpha,0) \\ (Y_+X_+u)(x)\ , & x\in(0,\beta)\ . \end{cases} \quad (3.8)$$

Odavde na osnovu izbora brojeva $\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}$ i na osnovu izbora odgovarajućih brojeva prilikom definisanja operatora X_- i Y_-, za $k = 0,1,\dots,n-1$ i $u\in\mathcal{D}$ dobijamo

$$\lim_{x\downarrow 0}(W_\Delta u)^{(k)}(x) = \lim_{x\downarrow 0}(Y_+X_+u)^{(k)}(x) = (X_+u)^{(k)}(0_+) - (X_+u)^{(k)}(0_-)$$

$$= u^{(k)}(0_+) - u^{(k)}(0_+) = 0\ .$$

Analogno

$$\lim_{x\uparrow 0}(W_\Delta u)^{(k)}(x) = -u^{(k)}(0_+) + u^{(k)}(0_+) = 0\ .$$

Pošto je $\operatorname{supp}\varphi\subseteq(-\delta/2,\delta/2)$ i $1<t_j<2$, $j = 1,\dots,2n$ drugi sabirak na desnoj strani jednakosti (3.7) uzima vrijednost nula na intervalu $[\delta,\beta)$. Analogna izjava vrijedi i za odgovarajuću formulu za Y_-X_-. Odatle zaključujemo da vrijedi

$$(W_\Delta u)(x) = \begin{cases} -u(x)\ , & x\in(\alpha,-\delta] \\ u(x)\ , & x\in[\delta,\beta)\ . \end{cases} \quad (3.9)$$

8. Ako interval Δ sadrži interval promjene $I_0 = (a_0,b_0)$ onda operatore X_+ i Y_+ definišemo kako slijedi

$$(X_+u)(x) = \begin{cases} u(x)\ , & x\in(a_0,\beta) \\ \varphi(x)\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j t_j u(b_0 - t_j(x-a_0))\ , & x\in(\alpha,a_0)\ , \end{cases}$$

$$(Y_+u)(x) = \begin{cases} 0\ , & x\in(\alpha,b_0) \\ u(x) + \sum_{j=1}^{2n}\alpha_j(\varphi h_j u)(a_0 - \frac{1}{t_j}(x-b_0))\ , & x\in(b_0,\beta)\ , \end{cases}$$

pri čemu je

$$h_j(x) = t_j^{-\tau}\rho_-(x)/\rho_+(b_o - t_j(x - a_o)) \quad (x \in [-(\delta/2) + a_o, a_o)) ,$$

$\varphi \in C^n(\Delta)$ i φ je jednaka 1 u okolini intervala I_o, $0 \leq \varphi \leq 1$ i $\operatorname{supp}\varphi \subseteq (a_o - \delta/2, b_o + \delta/2)$. Brojeve $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ biramo tako da oni zadovoljavaju jednačine u (3.2) i (3.3) (sa funkcijama ρ_+ i ρ_- koje odgovaraju intervalu I_o u (3.1')). Ovdje, kao i prije, zbog jednostavnosti smatramo da je funkcija r negativna na $(-\delta+a_o, a_o)$ i pozitivna na $(b_o, b_o+\delta)$. Sa ovako definisanim operatorima X_+ i Y_+ ne vrijedi $X_+\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ ni $Y_+\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$. Za $u \in \mathcal{D}$ i $k = 0,1,\ldots,n-1$ imamo

$$\lim_{x\uparrow a_o} (X_+u)^{(k)}(x) = u^{(k)}((b_o)_+)$$

i

$$\lim_{x\downarrow b_o} (Y_+u)^{(k)}(x) = u^{(k)}((b_o)_+) - u^{(k)}((a_o)_-) .$$

Očigledno vrijedi i

$$(Y_+X_+u)(x) = 0 \qquad (x \in (\alpha, b_o))$$

i

$$\lim_{x\downarrow b_o} (Y_+X_+u)(x) = (X_+u)^{(k)}((b_o)_+) - (X_+u)^{(k)}((a_o)_-)$$
$$= u^{(k)}((b_o)_+) - u^{(k)}((b_o)_+) = 0 .$$

Analogno definišemo X_- i Y_- i zaključujemo da vrijedi

$$(Y_-X_-u)(x) = 0 \qquad (x \in (a_o, \beta))$$

i, za $u \in \mathcal{D}$ i $k = 0,1,\ldots,n-1$,

$$\lim_{x\uparrow a_o} (Y_-X_-u)^{(k)}(x) = 0 .$$

Pošto je $[-\delta+a_o, a_o) \cup (b_o, b_o+\delta] \subseteq \Delta\setminus\mathcal{W}$, operatore X_+, Y_+ možemo smatrati definisanim i na prostoru $L^2(\Delta, r)$. Na sličan način kao u dijelovima 4,5 i 6 ovog dokaza, dokazuje se da ovdje definisani operatori X_+, Y_+ imaju osobine (b),(c) i (d) iz primjedbe I.3.7. Definišemo $W_\Delta := Y_+X_+ - Y_-X_-$. Kao i u primjedbi I.3.7 operator

W_Δ je ograničen i pozitivan u $L^2(\Delta,r)$ i $0\in\varrho(W_\Delta)$. Vrijedi

$$(W_\Delta u)(x) = \begin{cases} -(Y_-X_-u)(x), & x\in(\alpha,a_0) \\ 0, & x\in(a_0,b_0) \\ (Y_+X_+u)(x), & x\in(b_0,\beta). \end{cases} \tag{3.8'}$$

S obzirom na ranije dokazano vrijedi $W_\Delta\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}$. Analogno kao u dijelu 7 ovog dokaza imamo

$$(W_\Delta u)(x) = \begin{cases} -u(x), & x\in\Delta\cap(-\infty,-\delta+a_0] \\ \\ u(x), & x\in\Delta\cap[b_0+\delta,+\infty). \end{cases} \tag{3.9'}$$

9. Za interval $\Delta\in\{\Delta_1,\dots,\Delta_\nu\}$ konstruisali smo operator W_Δ u $L^2(\Delta,r)$ koji je ograničen, pozitivan u $L^2(\Delta,r)$, $0\in\varrho(W_\Delta)$ i za operator W_Δ, kada ga smatramo definisanim u $\mathbb{L}^2(\Delta,r)$, vrijedi $W_\Delta\mathcal{D}_\Delta\subseteq\mathcal{D}_\Delta$ i on ima osobine (3.9) i (3.9'). Označimo sa W_j operator W_{Δ_j}, $j=1,\dots,\nu$. Stavimo

$$W := W_1\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_\nu .$$

Operator W je pozitivan, ograničen u $L^2(a,b,r)$ i $0\in\varrho(W)$. Ostaje da se dokaže da vrijedi $W\mathcal{D}[JA]\subseteq\mathcal{D}[JA]$.

10. U ovom dijelu dokaza koristimo da je problem (1.1) regularan. Tada je karakterizacija skupa $\mathcal{D}[JA]=\mathcal{D}[B]$, $B=JA$, data u teoremu II.7.12. Neka je $f\in\mathcal{D}[JA]$. Tada $W\hat{f}\in Wf$ i $W\hat{f}=\sum_{j=1}^{\nu}W_j(\hat{f}\chi_{\Delta_j})$. Funkcije $(W_j(\hat{f}\chi_{\Delta_j}))^{(k)}$, $j=1,\dots,\nu$, $k=0,1,\dots,n$ su apsolutno neprekidne na intervalu $\mathrm{Cl}(\Delta_j)$, $j=1,\dots,\nu$. Budući da vrijedi (3.9) i (3.9') funkcije $(W\hat{f})^{(k)}$, $k=0,1,\dots,n-1$ su apsolutno neprekidne na $[a,b]$, tj. funkcija $W\hat{f}$ ima osobinu (II.7.A). Pošto $W_j\mathcal{D}_{\Delta_j}\subseteq\mathcal{D}_{\Delta_j}$, $j=1,\dots,\nu$, funkcija $W\hat{f}$ ima osobinu (II.7.B). S obzirom na (3.8') ako je I_0 interval promjene znaka funkcije r vrijedi $(W\hat{f})(x)=0$ $(x\in I_0)$. Ako interval I_j, $j\in\{1,\dots,\nu\}$ nije interval promjene, na osnovu (3.9) i (3.9') zaključujemo da vrijedi $(W\hat{f})(x)=-\hat{f}(x)$ ili $(W\hat{f})(x)=\hat{f}(x)$ $(x\in I_j)$. Iz posljednje dvije tvrdnje zaključujemo da funkcija $W\hat{f}$ ima osobinu (7.II.C). Iz spomenute dvije tvrdnje, za bilo koje

$j \in \{1,\dots,s\}$ i $y^{(n)} \in \mathcal{N}$, gdje je $\mathcal{N}$ skup definisan neposredno prije leme II.7.2 , zaključujemo da

$$\int_{I_j} \hat{f}^{(n)} y^{(n)*} p_o dx = 0 \quad \text{povlači} \quad \int_{I_j} (W\hat{f})^{(n)} y^{(n)*} p_o dx = 0 .$$

Odavde slijedi $\int_a^b (W\hat{f})^{(n)} y^{(n)*} p_o dx = 0 \quad (y^{(n)} \in \mathcal{N})$, tj. funkcija $W\hat{f}$ ima osobinu (II.7.D) . Odavde slijedi da je $\widehat{W\hat{f}} = W\hat{f}$. Prema teoremu II.7.12 $W\hat{f} \in \mathcal{D}[JA] = \mathcal{D}[B]$ ako i samo ako funkcija $W\hat{f}$ zadovoljava maksimalan sistem linearno nezavisnih glavnih rubnih uslova određenih rubnim uslovima (II.5.3) .

Pretpostavimo da je ispunjen uslov (b) teorema. Tada postoje $a', b' \in (a,b)$ takvi da $r(x) > 0$ (ili $r(x) < 0$) za sve $x \in (a,a') \cup (b',b)$. Prema (3.9) i (3.9′) odavde slijedi

$$(W\hat{f})(x) = \hat{f}(x) \quad (\text{ili} \quad (W\hat{f})(x) = -\hat{f}(x)) \quad (x \in (a,a') \cup (b',b)) .$$

U oba slučaja funkcije $W\hat{f}$ i $\hat{f}$ zadovoljavaju iste glavne rubne uslove u a i b . Kako $\hat{f} \in \mathcal{D}[JA]$, to i $W\hat{f} \in \mathcal{D}[JA]$, i inkluzija $W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$ je u ovom slučaju dokazana.

Pretpostavimo da je ispunjen uslov (a) teorema. Tada je skup $\mathcal{D}[JA]$ određen sistemom separiranih glavnih rubnih uslova. Ovaj slučaj je od interesa samo kada funkcija r ima različite znakove u okolini tačke a i u okolini tačke b , recimo da je, za neke $a', b' \in (a,b)$, $r(x) > 0$ $(x \in (a,a'))$ i $r(x) < 0$ $(x \in (b',b))$ Tada je, prema (3.9) i (3.9′) ,

$$(W\hat{f})(x) = \hat{f}(x) \quad (x \in (a,a')) \quad \text{i} \quad (W\hat{f})(x) = -\hat{f}(x) \quad (x \in (b',b)) .$$

Odavde je očigledno da funkcije $\hat{f}$ i $W\hat{f}$ zadovoljavaju iste glavne rubne uslove koji uljučuju samo jednu od rubnih tačaka a i b . Pošto $\hat{f} \in \mathcal{D}[JA]$ i $\mathcal{D}[JA]$ je određen separiranim glavnim rubnim uslovima, imamo da $W\hat{f} \in \mathcal{D}[JA]$. Tako je inkluzija $W\mathcal{D}[JA] \subseteq \mathcal{D}[JA]$ dokazano i u ovom slučaju. Teorem je dokazan.

Konstrukcija operatora X_+ , Y_+ u prethodnom dokazu inspirisana je lemom 1 iz [6] .

PRIMJEDBA 3.2. Pretpostavka da je problem (1.1) regularan korištena je samo u dijelu 10 prethodnog dokaza, da bi se obezbijedila karakterizacija skupa $\mathcal{D}[JA]$. Očigledno je da se ovaj metod može koristiti i u slučaju kada problem (1.1) nije regularan ali je skup $\mathcal{D}[JA]$ karakteriziran analogno kao u teoremu II.7.12.

PRIMJEDBA 3.3. U ovoj primjedbi ukazaćemo na mogućnost primjene metoda iz dokaza teorema 3.1 i u slučaju kada nije moguće dati eksplicitnu karakterizaciju skupa $\mathcal{D}$ [JA] . Ovo je naravno od interesa samo kada problem (1.1) nije regularan. Ovdje pretpostavljamo da su koeficijenti kvazi-diferencijalnog izraza ℓ glatki, tj. $p_j \in C^{n-j}(a,b)$, $j = 0,1,\dots,n$ i $r \in C(a,b)$. Tada klasa ekvivalencije $f \in L^2(a,b,r)$ pripada domenu $\mathcal{D}(A)$ ako i samo ako postoji funkcija $\bar{f} \in f$ za koju postoje izvodi $\bar{f}^{(j)}$, $j = 0,1,\dots,2n-1$ i oni su apsolutno neprekidne funkcije na kompaktnim podintervalima intervala (a,b) i za funkciju $\bar{f}$ vrijedi (II.2.B) . Dalje pretpostavljamo da operator $\hat{A}_0$ zadovoljava uslove (P1) i (P2) i da funkcija r ima konačan broj tačaka i intervala promjene koji su svi 2n-prosti. Tada se operator W , slično kao u dokazu teorema 3.1, može konstruisati tako da $W\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ i W je pozitivan ograničen operator u $L^2(a,b,r)$ za koji je $0 \in \rho(W)$. U tom cilju u dijelu 2 dokaza teorema 3.1 potrebno je izabrati $4n$ međusobno različitih tačaka $t_1,\dots,t_{4n} \in (1,2)$, uzeti funkciju φ iz $C^{2n}(\Delta)$ i operatore X_+ i Y_+ definisati analogno. Brojevi $\alpha_1,\dots,\alpha_{4n}$ odrede se tako da za klasu ekvivalencije $f \in \mathcal{D}(A)$ funkcije $(X_+\bar{f})^{(j)}$, $(Y_+\bar{f})^{(j)}$, $j = 0,1,\dots,2n-1$ budu apsolutno neprekidne na $\mathrm{Cl}(\Delta)$. Iz relacija, koje u ovom slučaju odgovaraju relacijama (3.9) i (3.9′) , lako se vidi da $(X_+\bar{f})(x) = 0$, $(Y_+\bar{f})(x) = 0$ $(x \in \mathcal{W})$ za bilo koje $f \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. Koristeći posebnu strukturu težinske funkcije r u blizini tačaka promjene pokazuje se da za $f \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ postoji funkcija $\hat{g} \in \mathbb{L}^2(\Delta, |r|)$ za koju je $\ell(X_+\bar{f}) = |r|\hat{g}$. Dakle $X_+\mathcal{D}(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{A})$.

Za operator W definisan kao u dijelu 9 prethodnog dokaza vrijedi $W\mathcal{D}(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{A})$. Domen hermitskog proširenja A operatora $\tilde{A}$ u $L^2(a,b,r)$ je sadržan u $\mathcal{D}(\tilde{A})$ i potpuno određen rubnim uslovima oblika (II.5.1). Ako je ispunjen jedan od uslova (a), (b) teorema 3.1, kao i u dijelu 10 dokaza ovog teorema, zaključujemo da je $W\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$. Odavde na osnovu teorema I.3.2 slijedi $\infty \notin c_s(A)$.

III.4. O kompletnosti na cijelom rangu i na polovini ranga.

4.1. U ovom odjeljku pretpostavljamo da operator $\hat{A}_0$ zadovoljava uslove (P1) i (P2) i da bilo koje hermitsko proširenje A operatora $\hat{A}_0$ u $L^2(a,b,r)$ ima diskretan spektar. Tada je operator A definitibilan u $L^2(a,b,r)$ i sve konačne kritične tačke operatora A su regularne. Ovdje takođe pretpostavljamo da tačka beskonačno nije singularna kritična tačka operatora A.

Označimo sa s_j (s_{-j}, respektivno), $j = 1,2,\ldots$ realne svojstvene vrijednosti operatora A za koje je

$$\varkappa_-(s_j,A) = 0 \quad (\varkappa_+(s_{-j},A) = 0, \text{ respektivno}) .$$

Tada je

$$\{s_j,s_{-j},\ j = 1,2,\ldots\} = (\sigma(A) \cap \mathbb{R}) \setminus c(A) .$$

Prema propoziciji 2.9 ukupan broj negativnih svojstvenih vrijednosti među s_j, $j = 1,2,\ldots$ i pozitivnih svojstvenih vrijednosti među s_{-j}, $j = 1,2,\ldots$ je manji ili jednak od $\varkappa_A$. Pošto $s_j \notin c(A)$, $j = \pm1,\pm2,\ldots$ vrijedi $\mathcal{S}_{s_j}(A) = \ker(A - s_jI)$ i $(\ker(A - s_jI), |[\cdot,\cdot]|)$ je Hilbertov prostor. Potprostori $\ker(A - s_jI)$, $j = \pm1,\pm2,\ldots$ su međusobno ortogonalni u Kreinovom prostoru $(L^2(a,b,r), [\cdot,\cdot])$, pa se svojstvene funkcije e_j, $j = \pm1,\pm2,\ldots$ operatora A, koje odgovaraju svojstvenim vrijednostima s_j, $j = \pm1,\pm2,\ldots$, respektivno mogu odabrati tako da vrijedi

$$[e_j,e_k] = (\operatorname{sgn} j)\delta_{jk}\ , \quad j,k = \pm1,\pm2,\ldots .$$

Označimo sa $\mathcal{K}_c$ linearni omotač (koji je očigledno konačno dimenzionalan) korjenih potprostora operatora A koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima koje su kritične tačke operatora A i svojstvenim vrijednostima operatora A van realne prave. Pošto su sve konačne kritične tačke operatora A regularne, skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ ne degeneriše na $\mathcal{K}_c$, pa je $(\mathcal{K}_c, [\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor. Označimo sa $\mathcal{K}_1$ ortogonalni komplement potprostora $\mathcal{K}_c$ u $L^2(a,b,r)$. Tada je $\mathcal{K} = \mathcal{K}_c \,[\dotplus]\, \mathcal{K}_1$, $(\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot])$ Kreinov prostor, $A\mathcal{K}_c \subseteq \mathcal{K}_c$, $A\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_1$.

Lako se vidi da tačka beskonačno nije singularna kritična tačka operatora $A_1 := A|_{\mathcal{K}_1}$ i da operator A_1 nema konačnih kritičnih tačaka. Vrijedi $\sigma(A_1) = \{s_j,s_{-j},\ j = 1,2,\ldots\}$. Na osnovu propozicija II.5.2 i II.5.6 iz [47] odavde slijedi da je zatvorenje linearnog omotača potprostora $\ker(A - s_jI)$ ($\ker(A - s_{-j}I$, respektivno) $j = 1,2,\ldots$

maksimalan uniformno pozitivan (negativan, respektivno) potprostor prostora $(\mathcal{K}_1[\cdot,\cdot])$ i mi ovaj potprostor označavamo sa $\mathcal{M}_+$ ($\mathcal{M}_-$, respektivno). Vrijedi dekompozicija $\mathcal{K}_1 = \mathcal{M}_+ [\dot{+}] \mathcal{M}_-$ i potprostori $\mathcal{M}_+$, $\mathcal{M}_-$ su invarijantni za operator A. Prostor $(\mathcal{M}_\pm, \pm[\cdot,\cdot])$ je Hilbertov prostor, $A|_{\mathcal{M}_\pm}$ je hermitski operator u ovom Hilbertovom prostoru i

$$\sigma(A|_{\mathcal{M}_+}) = \{s_j,\ j = 1,2,\dots\}, \qquad \sigma(A|_{\mathcal{M}_-}) = \{s_j,\ j = -1,-2,\dots\}.$$

Topologija prostora $(\mathcal{M}_\pm, \pm[\cdot,\cdot])$ podudara se sa topologijom prostora $(\mathcal{M}_\pm, (\cdot,\cdot))$.

Tada je $\{e_j,\ j = 1,2,\dots\}$ ($\{e_j,\ j = -1,-2,\dots\}$, resp.) ortonormirana baza Hilbertovog prostora $(\mathcal{M}_+, [\cdot,\cdot])$ $((\mathcal{M}_-, -[\cdot,\cdot])$, resp.) koja se sastoji od svojstvenih funkcija operatora A. Za bilo koje $f_1 \in \mathcal{K}_1$, imamo

$$f_1 = \sum_{|j|=1}^{+\infty} e_j [f_1, e_j]/[e_j, e_j],$$

pri čemu red konvergira u topologiji prostora $(\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot])$, pa zbog toga i u $L^2(a,b,|r|)$. Posljedica gornjih razmatranja je slijedeća propozicija.

PROPOZICIJA 4.1. Bilo koje $f \in L^2(a,b,r)$ ima jedinstven razvoj po svojstvenim funkcijama operatora A oblika

$$f = P_c f + \sum_{|j|=1}^{+\infty} e_j [f, e_j]/[e_j, e_j],$$

pri čemu P_c označava ortogonalnu projekciju na $\mathcal{K}_c$ u prostoru $L^2(a,b,r)$ i red konvergira po normi prostora $L^2(a,b,|r|)$.

S obzirom na teorem 3.1 i primjedbe 3.2 i 3.3, propozicija 4.1 sadrži razvoje na cijelom rangu (engl. full-range expansions) koji su razmatrani u [31, teoremi 2.3, 2.8, 4.6, 5.3 i 5.4] i [32, teoremi 2.1 i 3.1].

Kao i obično skup $\{v_j,\ j = 1,2,\dots\}$ je <u>baza</u> u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ako svaki vektor v iz $\mathcal{H}$ može na jedinstven način biti prikazan u obliku $\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j v_j = v$, pri čemu red konvergira ka v po normi prostora $\mathcal{H}$.

Ako je $\{f_1,\dots,f_k\}$ baza konačno dimenzionalnog prostora $\mathcal{K}_c$, onda je, prema propoziciji 4.1, skup

$$\{f_1,\dots,f_k,e_j,e_{-j},\ j = 1,2,\dots\}$$

baza prostora $L^2(a,b,|r|)$.

4.2. Neka je

$$L^2(a,b,r) = \mathcal{K}_+ [+] \mathcal{K}_-$$

fundamentalna dekompozicija koja odgovara fundamentalnoj simetriji J. Tada je

$$\mathcal{K}_\pm = \{ f \in L^2(a,b,r) :\ \tilde{f}\chi_{\Delta_\mp} = 0 \text{ g.s. na } (a,b) \text{ za sve } \tilde{f} \in f \} .$$

Označimo sa $P_\pm$ ortogonalne projektore na $\mathcal{K}_\pm$ u $L^2(a,b,r)$.

PROPOZICIJA 4.2. Neka je $\mathcal{L}_+$ maksimalan nenegativan potprostor Kreinovog prostora $(\mathcal{K}_c, [\cdot,\cdot])$ i $g_1,\dots,g_{m_+}$ baza potprostora $\mathcal{L}_+$. Tada je skup

$$\{P_+g_1,\dots,P_+g_{m_+},\ P_+e_j,\ j = 1,2,\dots\} \tag{4.1}$$

baza u prostoru $\mathcal{K}_+$. Analogno, ako je $\mathcal{L}_-$ maksimalan nepozitivan potprostor prostora $(\mathcal{K}_c, [\cdot,\cdot])$ i $h_1,\dots,h_{m_-}$ baza u $\mathcal{L}_-$, onda je skup

$$\{P_-h_1,\dots,P_-h_{m_-}, P_-e_j,\ j = -1,-2,\dots\}$$

baza u prostoru $\mathcal{K}_-$.

DOKAZ. Potprostor $\mathcal{L}_+ [+] \mathcal{M}_+$ je maksimalan nenegativan potprostor prostora $(L^2(a,b,r), [\cdot,\cdot])$ (vidite [41, lema 1.3] ili [7, lema V.4.5]) . Prema teoremu V.4.2 iz [7] vrijedi $P_+(\mathcal{L}_+ [+] \mathcal{M}_+) = \mathcal{K}_+$. Označimo sa K_+ angularni operator potprostora $\mathcal{L}_+ [+] \mathcal{M}_+$ u odnosu na $\mathcal{K}_+$ (vidite [7, teorem II.11.6]) . Proizvoljan element $g \in \mathcal{L}_+ [+] \mathcal{M}_+$ ima jedinstven razvoj oblika

$$g = \sum_{j=1}^{m_+} a_j g_j + \sum_{j=1}^{+\infty} e_j [g,e_j]/[e_j,e_j] , \tag{4.2}$$

pri čemu $a_1,\dots,a_{m_+} \in \mathbb{C}$ i red u (4.2) konvergira po normi prostora $L^2(a,b,|r|)$. Za bilo koji $f_1 \in \mathcal{K}_+$ vrijedi $f_1 + K_+f_1 \in \mathcal{L}_+ [+] \mathcal{M}_+$.

Ako djelujemo sa P_+ na obe strane jednakosti (4.2) stavljajući $g = f_1 + K_+f_1$, onda zbog neprekidnosti operatora P_+ dobijamo

$$f_1 = P_+(f_1 + K_+f_1) = \sum_{j=1}^{m_+} a_j P_+ g_j + \sum_{j=1}^{+\infty} P_+ e_j [f_1 + K_+f_1, e_j]/[e_j, e_j] ,$$

pri čemu $a_1, \ldots, a_{m_+} \in \mathbb{C}$ i zavise od f_1 i red konvergira po normi prostora $(\mathcal{K}_+, (\cdot,\cdot))$. Dakle skup u (4.1) je baza prostora $(\mathcal{K}_+, (\cdot,\cdot))$. Slično se pokaže i drugi dio propozicije. Propozicija je dokazana.

S obzirom na teorem 3.1 i primjedbe 3.2 i 3.3 propozicija 4.2 sadrži razvoje na polovini ranga (engl. half-range expansions) koji su razmatrani u [6, teoremi 1,2 i 3], [31, teoremi 3.4, 4.7 i 5.5] i [32, teoremi 2.6 i 3.3].

PRIMJEDBA 4.3. U razmatranjima ovog odjeljka mi smo u stvari koristili samo definitibilnost operatora A i odsustvo singularnih kritičnih tačaka. Dakle analogni rezultati mogu biti dokazani u proizvoljnom Kreinovom prostoru za definitibilan operator sa regularnom spektralnom funkcijom.

III.5. O uniformnoj konvergenciji razvoja po svojstvenim funkcijama

U ovom odjeljku pretpostavljamo da je problem (1.1) regularan. Zbog jednostavnosti takođe smatramo da je $\mathcal{W} = \emptyset$. Kao i prije sa A označavamo proizvoljno hermitsko proširenje operatora $\hat{A}$ u $L^2(a,b,r)$. Napomenimo da zbog $\mathcal{W} = \emptyset$ vrijedi $\hat{f} = \overline{f}$ za svako $f \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. Takođe pretpostavljamo da vrijedi $0 \in \rho(A)$. Budući da je spektar operatora A diskretan, na isti način kao i u napomeni umjesto dokaza teorema 2.13 vidi se da ova posljednja pretpostavka nije ograničenje opštosti razmatranja. Koristimo notaciju sa početka prethodnog odjeljka. Kao što smo tamo napomenuli, među svojstvenim vrijednostima s_j, $j = 1,2,\ldots$ ima konačno mnogo negativnih, a među svojstvenim vrijednostima s_{-j}, $j = 1,2,\ldots$ ima konačno mnogo pozitivnih. Odavde slijedi da svojstvene vrijednosti s_j, $j = \pm1,\pm2,\ldots$ možemo numerisati tako da vrijedi

$$s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_\omega < 0 < s_{\omega+1} \leq \ldots$$
$$\ldots \leq s_{\psi-1} < 0 < s_\psi \leq \ldots \leq s_{-2} \leq s_{-1} \quad (\psi \leq 0 \leq \omega) .$$

Naravno uključujemo mogućnost da u prvoj od gornjih relacija lijevo od nule nema svojstvenih vrijednosti, tada uzimamo $\omega = 0$, ili da u drugoj relaciji desno od nule nema svojstvenih vrijednosti, tada uzimamo $\psi = 0$. Potprostor $\mathcal{K}_c$ je definisan u prethodnom odjeljku, a sa $\mathcal{K}_d$ označavamo linearni omotač, također konačno dimenzionalan, korjenih potprostora operatora A koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $s_\psi,\dots,s_{-1},s_1,\dots,s_\omega$ (tj. potprostora $\ker(A - s_jI)$, $j = \psi,\dots,-1,1,\dots,\omega$). Potprostor $\mathcal{K}_c [\dot{+}] \mathcal{K}_d$ je ortogonalno dopunjiv u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$ i sa $\mathcal{K}_o$ označimo ortogonalni komplement ovog potprostora u $L^2(a,b,r)$. Tada vrijedi

$$L^2(a,b,r) = \mathcal{K}_o [\dot{+}] \mathcal{K}_c [\dot{+}] \mathcal{K}_d .$$

Označimo sa P_o, P_c, P_d ortogonalne projektore u $L^2(a,b,r)$ na potprostore $\mathcal{K}_o$, $\mathcal{K}_c$, $\mathcal{K}_d$, respektivno. Potprostori $\mathcal{K}_o$, $\mathcal{K}_c$, $\mathcal{K}_d$ su invarijantni za operator A i vrijedi

$$\sigma(A|_{\mathcal{K}_o}) = \{ s_j, s_k,\ j = \omega+1,\omega+2,\dots,k = \psi-1,\psi-2,\dots \} .$$

Budući da je $\mathcal{R}(A^{-1}P_d) = \mathcal{K}_d \subseteq C^{(n-1)}(a,b)$, $\mathcal{R}(A^{-1}P_c) = \mathcal{K}_c \subseteq C^{(n-1)}(a,$ i kako su potprostori $\mathcal{K}_d$ i $\mathcal{K}_c$ konačno dimenzionalni, operatori $A^{-1}P_d$ i $A^{-1}P_c$ su integralni operatori u $L^2(a,b,r)$ sa jezgrima H^d i H^c, respektivno. Funkcije H^d_{ik}, H^c_{ik}, $i,k = 0,1,\dots,n-1$ su neprekidne na $[a,b]\times[a,b]$. Naime vrijedi

$$H^d_{ik}(x,s) = \sum_{j=\psi}^{\omega} \frac{\bar{e}_j^{(i)}(x)(\bar{e}_j^{(k)}(x))^*}{s_j\,[e_j,e_j]} . \tag{5.1}$$

Kako je, prema teoremu 2.13 operator A^{-1} integralni operator u $L^2(a,b,r)$ sa jezgrom $H(\cdot,\cdot,0) = H(\cdot,\cdot)$, koje ima osobine navedene u primjedbi 2.14, to je i operator $A^{-1}P_o$ kompaktan integralni operator u $L^2(a,b,r)$ sa jezgrom H^o, $H^o = H - H^c - H^d$. Pri tome vrijedi

(A) $H^o(x,s) = (H^o(s,x))^*$ $\quad (x,s \in [a,b])$.

(B) Funkcije H^o_{ik}, $i,k = 0,1,\dots,n-1$ su neprekidne na $[a,b]\times[a,b]$

(C) Operator $A^{-1}P_o$ je nenegativan hermitski operator u Kreinovom prostoru $L^2(a,b,r)$.

(D) Potprostor $\ker(A^{-1}P_o)$ je ortogonalno dopunjiv u $L^2(a,b,r)$

Stavimo

$$\mathbb{I} = \{\dots,-2,-1,1,2,\dots\} \setminus \{\psi,\psi+1,\dots,-1,1,\dots,\omega-1,\omega\} .$$

Slijedeći teorem je analogon Mercerovog teorema za pozitivne integralne operatore u Hilbertovom prostoru (vidjeti [40 , teorem 5.13]) .

TEOREM 5.1. Uz prethodno uvedene oznake vrijede slijedeći razvoji

$$H^o_{ik}(x,s) = \sum_{j\in\mathbb{I}} \frac{\overline{e}_j^{(i)}(x)(\overline{e}_j^{(k)}(x))^*}{s_j[e_j,e_j]} \quad (x,s\in[a,b],\ i,k=0,1,\dots,n-1), \quad (5.2)$$

pri čemu redovi konvergiraju apsolutno i uniformno na $[a,b]\times[a,b]$.

DOKAZ. Prema spektralnom teoremu za nenegativne operatore u Kreinovom prostoru ([47, teorem II.6.1(a)]) imamo

$$(A^{-1}P_o)f = \sum_{j\in\mathbb{I}} \frac{e_j[f,e_j]}{s_j[e_j,e_j]} + Nf \qquad (\ f\in L^2(a,b,r)\ ) ,$$

pri čemu je $N^2 = (A^{-1}P_o)N = 0$ i red konvergira po normi prostora $L^2(a,b,|r|)$. Sada ćemo pokazati da uslov (D) povlači $N = 0$ (vidjeti [43, str.12-13]) . Iz relacije (5.2) slijedi $Nf\in Cl(\mathcal{R}(A^{-1}P_o)) = \mathcal{K}_o$ za sve $f\in L^2(a,b,r)$, a prema jednakosti $(A^{-1}P_o)N = 0$ je

$$\mathcal{R}(N)\subseteq \ker(A^{-1}P_o) = \mathcal{K}_c [\dot{+}] \mathcal{K}_d .$$

Dakle $N = 0$.

Stavimo

$$a_m(x,s) = H^o(x,s) - \sum_{\substack{|j|=1\\ j\in\mathbb{I}}}^{m} \frac{\overline{e}_j(x)(\overline{e}_j(s))^*}{s_j[e_j,e_j]} .$$

Tada, za bilo koje $f\in L^2(a,b,r)$, $\tilde{f}\in f$ i $m = 1,2,\dots$ imamo

$$\int_a^b\int_a^b a_m(x,s)\tilde{f}(x)\tilde{f}^*(s)r(x)r(s)dsdx$$

$$= [A^{-1}P_of,f] - \sum_{\substack{|j|=1\\ j\in\mathbb{I}}}^{m} \frac{|[f,e_j]|^2}{s_j[e_j,e_j]} = \sum_{\substack{|j|=m+1\\ j\in\mathbb{I}}}^{+\infty} \frac{|[f,e_j]|^2}{|s_j|} \geq 0 . \quad (5.3)$$

Nejednakost (5.3) povlači

$$a_m(x,x) \geqslant 0 \qquad (x \in [a,b] \ , \ m = 1,2,\dots)$$

Da bi ovo dokazali primijetimo da je funkcija $x \longmapsto a_m(x,x)$ $(x \in [a,b]$ neprekidna funkcija na $[a,b]$, pa ako je $a_m(x_o,x_o) \leqslant 0$ za neko $x_o \in [a,b]$, onda postoje otvoren interval $\Delta \subseteq [a,b]$, koji sadrži x_o , i $\varepsilon > 0$ takvi da vrijedi

$$\operatorname{Re} a_m(x,s) \leqslant -\varepsilon \qquad \text{za sve} \quad x,s \in \Delta \ .$$

Ako stavimo $f(x) = (\operatorname{sgn} r(x))\chi_\Delta(x)$ $(x \in [a,b])$ u (5.3) dobijamo

$$0 \leqslant \iint_{\Delta\Delta} a_m(x,s)\,|r(x)|\,|r(s)|\,dsdx$$

$$= \iint_{\Delta\Delta} (\operatorname{Re} a_m(x,s))\,|r(x)|\,|r(s)|\,dsdx + i \iint_{\Delta\Delta} (\operatorname{Im} a_m(x,s))\,|r(x)|\,|r(s)|\,dsdx$$

$$= \iint_{\Delta\Delta} \operatorname{Re} a_m(x,s)\,|r(x)|\,|r(s)|\,dsdx \leqslant -\varepsilon\Big(\int_\Delta |r(x)|\,dx\Big)^2 < 0 \ .$$

Kontradikcija! Dakle $a_m(x,x) \geqslant 0$ $(x \in [a,b]$, $m = 1,2,\dots)$, tj.

$$H^o(x,x) \geqslant \sum_{\substack{|j|=1 \\ j \in \Pi}}^{m} \frac{|e_j(x)|^2}{|s_j|} \qquad (x \in [a,b],\ m = 1,2,\dots\ ) \ . \qquad (5.4)$$

Odavde zaključujemo da red čije se parcijalne sume pojavljuju sa desne strane nejednakosti (5.4) konvergira za svako $x \in [a,b]$. Pošto je funkcija H^o ograničena na $[a,b] \times [a,b]$ odavde slijedi da za neki realan broj M vrijedi

$$\sum_{j \in \Pi} \frac{|\bar{e}_j(x)|^2}{|s_j|} \leqslant H^o(x,x) \leqslant M \qquad (x \in [a,b]) \ .$$

Na osnovu Cauchyjeve nejednakosti (viditi [40, str.11]), odavde slijedi da red

$$\sum_{j \in \Pi} \frac{\bar{e}_j(x)(\bar{e}_j(s))^*}{|s_j|} = k(x,s) \qquad (x,s \in [a,b]) \qquad (5.5)$$

konvergira apsolutno i uniformno na $[a,b]$ u odnosu na jednu promjenljivu kada je druga fiksirana. Funkcija k je ograničena na $[a,b] \times [a,b]$ i neprekidna na $[a,b]$ u odnosu na jednu promjenljivu kada je druga fiksirana.

Sada razmatramo integralni operator K sa jezgrom k

u prostoru $L^2(a,b,r)$. Očigledno je da funkcija

$$x \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{I}} \frac{\bar{e}_j(x)[f,e_j]}{s_j[e_j,e_j]} \qquad (x \in [a,b])$$

pripada klasi ekvivalencije Kf za svako $f \in L^2(a,b,r)$. Na osnovu relacije (5.2) (dokazali smo da je $N = 0$) dobijamo $A^{-1}P_0 = K$. Odavde slijedi da za gotovo sve $x \in [a,b]$ vrijedi

$$k(x,s) = H^0(x,s) \quad \text{za gotovo sve} \quad s \in [a,b] .$$

Budući da su za fiksirano x funkcije $k(x,\cdot)$, $H^0(x,\cdot)$ neprekidne na $[a,b]$ dobivamo da je za gotovo sve $x \in [a,b]$

$$k(x,s) = H^0(x,s) \qquad (s \in [a,b]) .$$

Analognim rasuđivanjem zaključujemo da je

$$k(x,s) = H^0(x,s) \qquad (x,s \in [a,b]) . \tag{5.6}$$

Iz (5.5) i (5.6) je

$$H^0(x,x) = \sum_{j\in\mathbb{I}} |\bar{e}_j(x)|^2/|s_j| \qquad (x \in [a,b]) ,$$

a posljednji red prema Dinijevom teoremu ([64, III, 3.2 teorem 14]) konvergira uniformno na $[a,b]$. Primjenjujući ponovo Cauchyjevu nejednakost i jednakosti (5.6) i (5.5) dobivamo tvrdnju teorema za $i = k = 0$. Da bi dokazali teorem za $i > 0$ ili $k > 0$ treba primijeniti metod iz rada [37, dio II, str.379-381] . Teorem je dokazan.

Sada dokazujemo teorem koji daje još jednu karakterizaciju skupa $\mathcal{D}[JA]$, preko uniformno konvergentnih razvoja po svojstvenim funkcijama operatora A . Ova karakterizacija je analogna sa karakterizacijom skupa $\mathcal{D}[B] = \mathcal{D}[JA]$, $B = JA$ u radu [37, dio II, 11°] koja je data preko razvoja po svojstvenim funkcijama operatora B (vidite takođe [35]) .

TEOREM 5.2. Klasa ekvivalencije f pripada skupu $\mathcal{D}[JA]$ ako i samo ako vrijede razvoji

$$\hat{f}^{(k)}(x) = \sum_{|j|=1}^{+\infty} \frac{\bar{e}_j^{(k)}(x)[f,e_j]}{[e_j,e_j]} + (\overline{P_c f})^{(k)}(x) \quad (x\in[a,b],k=0,1,\dots,n-1), \tag{5.7}$$

pri čemu red konvergira apsolutno i uniformno na $[a,b]$ i

$$\hat{f}^{(n)} = \sum_{|j|=1}^{+\infty} \frac{\bar{e}_j^{(n)}[f,e_j]}{[e_j,e_j]} + (P_c f)^{(n)} , \tag{5.8}$$

pri čemu red konvergira u normi prostora $L^2(a,b,p_o)$.

DOKAZ. Neka $f \in \mathcal{D}[JA]$. Za $\nu = 1,2,\ldots$ stavimo

$$f_\nu = \sum_{|j|=1}^{\nu} \frac{e_j[f,e_j]}{[e_j,e_j]} + P_c f .$$

Očigledno $f_\nu \in \mathcal{D}(A)$, pa je $\hat{f}_\nu = \overline{f}_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$. Na osnovu jednakosti (5.1), teorema 5.1 i osobine (B) funkcija H^o_{ik} , $i,k=0,1,\ldots,n-1$ postoji realan broj M_1 takav da je

$$\sum_{|j|=1}^{+\infty} \frac{|\overline{e}_j^{(k)}(x)|^2}{s_j[e_j,e_j]} \leqslant M_1 \qquad (x \in [a,b] , \quad k = 0,1,\ldots,n-1) .$$

Pored toga za $x \in [a,b]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ i $1 \leqslant \mu < \nu < +\infty$ imamo

$$|\hat{f}_\nu^{(k)}(x) - \hat{f}_\mu^{(k)}(x)|^2 = \left| \sum_{|j|=\mu+1}^{\nu} \frac{\overline{e}_j^{(k)}(x)[f,e_j]}{[e_j,e_j]} \right|^2$$

$$\leqslant \sum_{|j|=\mu+1}^{\nu} |s_j| \left|[f,e_j]\right|^2 \sum_{|j|=\mu+1}^{\nu} |\overline{e}_j^{(k)}(x)|^2/|s_j|$$

$$\leqslant M_1 \sum_{|j|=\mu+1}^{\nu} |s_j| \left|[f,e_j]\right|^2 . \tag{5.9}$$

Ako je $|j| > \max\{\omega,|\psi|\} = m_o$, onda je $|s_j| = s_j/[e_j,e_j]$, pa prema teoremu I.5.4 vrijedi

$$\sum_{|j|=m_o+1}^{+\infty} |s_j| \left|[f,e_j]\right|^2 < +\infty .. \tag{5.10}$$

Odavde na osnovu nejednakosti (5.9), dobijamo da niz $(\hat{f}_\nu^{(k)})_{\nu=1}^{+\infty}$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ konvergira uniformno na $[a,b]$ ka nekoj, na $[a,b]$ neprekidnoj, funkciji h_k $(k=0,1,\ldots,n-1)$.

Kako je $f \in \mathcal{D}[JA]$, prema primjedbi I.5.5 zaključujemo da je

$$f = \sum_{|j|=1}^{+\infty} e_j[f,e_j]/[e_j,e_j] + P_c f ,$$

pri čemu red konvergira po normi prostora $L^2(a,b,|r|)$, tj. $f_\nu \longrightarrow f$ $(\nu \longrightarrow +\infty)$ po normi prostora $L^2(a,b,|r|)$. Kako $\hat{f}_\nu \longrightarrow h_o$ $(\nu \longrightarrow +\infty)$ uniformno na $[a,b]$, to vrijedi $\hat{f} = h_o$ gotovo svuda na $[a,b]$. Neprekidnost funkcija $\hat{f}$ i h_o daje $\hat{f}(x) = h_o(x)$ ($x \in [a,b]$). Dakle, dokazali smo da red u jednakosti (5.7) pri $k = 0$ konvergira uniformno na $[a,b]$ ka funkciji $\hat{f}$. Diferencirajući po x obje strane dokazane jednakosti (tj. jednakosti (5.1) pri $k = 0$) dobijamo $\hat{f}'(x) = h_1(x)$ $(x \in [a,b])$. Ponovljenim diferenciranjem dobijamo da razvoji navedeni u (5.7) konvergiraju uniformno na $[a,b]$.

Da bi dokazali (5.8) primijetimo da prema teoremu I.5.4 imamo

$$[A(f_\nu - f_\mu), f_\nu - f_\mu] = \sum_{|j|=\mu+1}^{\nu} \frac{s_j |[f,e_j]|^2}{[e_j,e_j]} \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \nu>\mu) \tag{5.11}$$

Nadalje je

$$[A(f_\nu - f_\mu), f_\nu - f_\mu] = \int_a^b \ell(\bar{f}_\nu - \bar{f}_\mu)(\hat{f}_\nu - \hat{f}_\mu)^* \, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \int_a^b p_{n-j} |\hat{f}_\nu^{(j)} - \hat{f}_\mu^{(j)}|^2 dx - \sum_{j=1}^{n} \Big[(\bar{f}_\nu - \bar{f}_\mu)^{[2n-j]} (\hat{f}_\nu - \hat{f}_\mu)^{*(j-1)}\Big]_a^b \tag{5.12}$$

Iz relacije (5.7) slijedi

$$\int_a^b p_j |\hat{f}_\nu^{(j)} - \hat{f}_\mu^{(j)}|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \nu>\mu, \ j = 0,1,\dots,n-1) \tag{5.13}$$

i

$$(\hat{f}_\nu - \hat{f}_\mu)^{*(j-1)}(a) \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \nu>\mu, \ j = 1,\dots,n), \tag{5.14}$$

$$(\hat{f}_\nu - f_\mu)^{*(j-1)}(b) \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \nu>\mu, \ j = 1,\dots,n). \tag{5.15}$$

Prema [37, dio II, § 8] iz relacija (5.14) i (5.15) slijedi

$$\sum_{j=1}^{n} \Big[(\bar{f}_\nu - \bar{f}_\mu)^{[2n-j]} (\hat{f}_\nu - \hat{f}_\mu)^{*(j-1)}\Big]_a^b \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \nu>\mu). \tag{5.16}$$

Sada relacije (5.11, 12, 13 i 16) daju

$$\int_a^b p_o |\hat{f}_\nu^{(n)} - \hat{f}_\mu^{(n)}|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (\nu,\mu \longrightarrow +\infty, \nu>\mu),$$

tj. $(\hat{f}_\nu^{(n)})_{\nu=1}^{+\infty}$ je Cauchyjev niz u prostoru $L^2(a,b,p_o)$. Budući da je prostor $L^2(a,b,p_o)$ kompletan, postoji izmjeriva funkcija $\varphi \in L^2(a,b,p_o)$ takva da

$$\int_a^b p_o|\varphi - \hat{f}_\nu^{(n)}|^2 dx \longrightarrow 0 \qquad (\nu \longrightarrow +\infty)\ . \tag{5.17}$$

Kako je

$$\left|\int_a^x \varphi(t)dt - \hat{f}_\nu^{(n-1)}(x) + \hat{f}_\nu^{(n-1)}(a)\right| \leqslant \int_a^x |\varphi(t) - \hat{f}_\nu^{(n)}(t)|dt$$

$$\leqslant \left(\int_a^b \frac{dt}{p_o(t)}\right)^{1/2}\left(\int_a^b p_o(t)|\varphi(t) - \hat{f}_\nu^{(n)}(t)|^2 dt\right)^{1/2} \quad (a\leqslant x\leqslant b,\ \nu=1,2,\dots\ ),$$

imamo

$$\int_a^x \varphi(t)dt - \hat{f}^{(n-1)}(x) + \hat{f}^{(n-1)}(a)$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\left(\int_a^x \varphi(t)dt - \hat{f}_\nu^{(n-1)}(x) + \hat{f}_\nu^{(n-1)}(a)\right) = 0\ .$$

Dakle, $\varphi = \hat{f}^{(n)}$ gotovo svuda na $[a,b]$. S obzirom na (5.17) ovim je dokazano da vrijedi (5.8).

Dokažimo i obrnuto. Neka u klasi ekvivalencije $f \in L^2(a,b,r)$ postoji funkcija $\hat{f}$ takva da za funkcije $\hat{f}^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1,n$ vrijede razvoji u (5.7) i (5.8). Budući da je konvergencija razvoja u (5.7) uniformna na $[a,b]$ i funkcije $(\overline{P_c f})^{(k)}$, $\overline{e}_j^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $j = \pm 1,\pm 2,\dots$ su neprekidno diferencijabilne na $[a,b]$, slijedi da funkcija $\hat{f}$ ima osobinu (II.7.A). Pošto funkcije $(\overline{P_c f})^{(n)}$ $\overline{e}_j^{(n)}$, $j = +1,+2,\dots$ pripadaju prostoru $L^2(a,b,p_o)$, iz (5.8) dobijamo $\hat{f}^{(n)} \in L^2(a,b,p_o)$, tj. funkcija $\hat{f}$ ima osobinu (II.7.B). Zbog $\mathcal{W} = \emptyset$, uslovi (II.7.C i D) su trivijalno zadovoljeni, pa vrijedi $f \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ definisano u odjeljku II.7). Kako $e_j \in \mathcal{D}(A)$, $j = \pm 1,\pm 2,\dots$ i $P_c f \in \mathcal{D}(A)$, to funkcije $\overline{e}_j$, $j = \pm 1,\pm 2,\dots$ i $\overline{P_c f}$ zadovoljavaju glavne rubne uslove kojim je određen skup $\mathcal{D}[JA]$. Odavde, na osnovu konvergencije razvoja u (5.7) u tačkama a i b , dobijamo da funkcija $\hat{f}$ zadovoljava glavne rubne uslove koji određuju skup $\mathcal{D}[JA]$, pa prema teoremu II.7.12 vrijedi $f \in \mathcal{D}[JA]$. Teorem je dokazan.

L I T E R A T U R A

1. Akopjan, R.V.: K teorii spektral'noĭ funkcii J-neotricatel'nogo operatora. Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 13 (1978), 114-121.
2. Atkinson, F.V., Everitt, W.N., Ong, K.S.: On the m-coefficient of Weyl for a differential equation with an indefinite weight function. Proc. London.Math. Soc. 29 (1974), 368-384.
3. Atkinson, F.V., Jabon, D.: Indefinite Sturm-Liouville Problems. Proceedings of the 1984 Workshop "Spectral theory of Sturm-Liouville differential operators". ANL-84-73, Argonne National Laboratory, Argonne, 1984, 31-45.
4. Bajasgalan, C.: O fundamental'noĭ privodimosti položitel'nyh operatorov v prostranstvah s indefinitnoĭ metrikoĭ. Studia Sci. Math. Hungar. 13 (1978), 143-150.
5. Beals, R.: On an equation of mixed type from electron scattering. J. Math. Anal. Appl. 58 (1977), 32-45.
6. Beals, R.: Indefinite Sturm-Liouville problems and half-range completeness. J. Differential Equations 56 (1985), 391-407.
7. Bognár, J.: Indefinite inner product spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
8. Coddington, E.A., de Snoo, H.S.V.: Regular boundary value problems associated with pairs of ordinary differential expressions. Lecture Notes in Mathematics 858, Springer Verlag, Berlin, 1981.
9. Ćurgus, B.: On the regularity of the critical point infinity of definitizable operators. Integral Equations Operator Theory 8 (1985), 462-488.
10. Ćurgus, B., Langer, H.: Spectral properties of self-adjoint ordinary differential operators with an indefinite weight function. Proceedings of the 1984 Workshop "Spectral theory of Sturm-Liouville differential operators". ANL-84-73, Argonne National Laboratory, Argonne, 1984, 73-80.
11. Daho, K.: Spectral theory of symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function. Ph. D. thesis. Uppsala University, Uppsala, 1979.

12. Daho, K.: A Titchmarsh-Weyl matrix function for symmetric differential equations of order 2n with an indefinite weight function. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 98 (1984), 311-337.

13. Daho, K., Langer, H.: Some remarks on a paper by W. N. Everitt. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 78 (1977), 71-79.

14. Daho, K., Langer, H.: Sturm-Liouville operators with an indefinite weight function. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 78 (1977), 161-191.

15. Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear operators, Part II: Spectral theory, self adjoint operators in Hilbert space. Interscience Publ. Inc., New York, 1963.

16. Everitt, W.N.: On certain regular ordinary differential expressions and related differential operators. Proceedings, International Conference on Spectral Theory of Differential Operators, University of Alabama, Birmingham, USA, 1981, Mathematical Studies 55, North-Holland, 1981, 115-167

17. Everitt, W.N., Kwong, M.K., Zettl, A.: Differential operators and quadratic inequalities with a degenerate weight. J. Math. Anal. Appl. 98 (1984), 378-399.

18. Glazman, I.M.: Prjamye metody kačestvennogo spektral′nogo analiza singuljarnyh differencial′nyh operatorov. Nauka, Moskva, 1967.

19. Hess, P.: Zur Theorie der linearen Operatoren eines J-Raumes. Operatoren, die von kanonischen Zerlegungen reduziert werden. Math. Z. 106 (1968), 88-96.

20. Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Götinger Nachrichten, Mitteilung 1, 2 (1904), 4, 5 (1906).

21. Jonas, P.: Über die Erhaltung der Stabilität J-pozitiver Operatoren bei J-positiven und J-negativen Störungen. Math. Nachr. 65 (1975), 211-218.

22. Jonas, P.: Relatively compact perturbations of uniformly J-positive operators. Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik, Preprint P-15/80, Berlin, 1980.

23. Jonas, P.: On the functional calculus and the spectral function for definitizable operators in Krein spaces. Beiträge Anal. 16 (1981), 121-135.

24. Jonas, P.: Compact perturbations of definitizable operators. II. J. Operator Theory 8 (1982), 3-18.

25. Jonas, P.: Regularity criteria for critical points of definitizable operators. Spectral theory of linear operators and related topics, 8th international conference on operator theory, Timisoara and Herculane, Romania, June 6-16, 1983. Operator Theory: Advances and Applications 14, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984, 179-195.

26. Jonas, P., Langer, H.: Compact perturbations of definitizable operators. J. Operator Theory 2 (1979), 63-77.

27. Jörgens, K.: Spectral theory of second-order ordinary differential equations. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 1964.

28. Jörgens, K., Rellich, F.: Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

29. Kamke, E.: Zum Entwicklungssatz bei polaren Eigenwertaufgaben. Math. Z. 45(1939), 706-718.

30. Kamke, E.: Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. I. Math. Z. 45 (1939), 759-787.

31. Kaper, H.G., Kwong, M.K., Lekkerkerker, C.G., Zettl, A.: Full- and half-range theory of indefinite Sturm-Liouville problems. ANL-83-76, Argonne National Laboratory, Argonne,1983.

32. Kaper, H.G., Kwong, M.K., Lekkerkerker, C.G., Zettl, A.: Full- and partial-range eigenfunction expansions for Sturm-Liouville problems with indefinite weights. Proc. Roy. Soc. Edinbugh Sect. A 98 (1984), 69-88.

33. Kaper, H.G., Lekkerkerker, C.G., Zettl, A.: Linear transport theory and an indefinite Sturm-Liouville problem. Conference on ordinary and partial differential equations, Dundee, 1982. Lecture Notes in Mathematics 964, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 316-361.

34. Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, Berlin, 1966.

35. Krein, M.: Sur les développements des fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites quelconque. Mat. Sb. (N.S.) 2 (44) (1937), 923-932.

36. Kreĭn, M.G.: Pro lіnіĭnі cіlkom neperervnі operatori v funkcіonal'nih prostorah z dvoma normami. Akad. Nauk Ukrain. RSR. Zbirnik Prac' Inst. Mat. 9 (1947), 104-129.

37. Kreĭn, M.G.: Teorija samosoprjažennyh rasširenii poluograničennyh èrmitovyh operatorov i ee priloženija. I - II. Mat. Sb. (N.S.) 20 (62) (1947), 431-495, i 21 (63) (1947), 365-404.

38. Kreĭn, M.G., Langer, G.K.: O spektral′noĭ funkcii samosoprjažennogo operatora v prostranstve s indefinitnoĭ metrikoĭ. Dokl. Akad. Nauk SSSR 152 (1963), 39-42.

39. Kreĭn, S.G.: Lineinye differencial′nye uravnenija v banahovom prostranstve. Nauka, Moskva, 1967.

40. Kurepa, S.: Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora. Školska knjiga, Zagreb, 1981.

41. Langer, H.: Spektraltheorie linearer Operatoren in J-Räumen und einige Anwendungen auf die Schar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$. Habilitationsschrift, Dresden, 1965.

42. Langer, G.: O maksimal′nyh dual′nyh parah invariantnyh podprostranstv J-samosoprjažennyh operatorov. Mat. Zametki 7 (1970), 443-447.

43. Langer, H.: Invariante Tailräume definisierbarer J-selbstadjungierter Operatoren. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 475 (1971).

44. Langer, H.: Verallgemeinerte Resolventen eines J-nichtnegativen Operators mit endlichem Defekt. J. Funct. Anal. 8 (1971), 287-320.

45. Langer, H.: Zur Spektraltheorie verallgemeinerter Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit einer nichtmonotonen Gewichtfunktion. Univ. Jyväskylä Dept. Math. Rep 14 (1972).

46. Langer, H.: Sturm-Liouville problems with indefinite weight function and operators in spaces with indefinite metric. Uppsala conference on differential equations 1977. Almqvist & Wiksell, 1977, 114-124.

47. Langer, H.: Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces. Functional analysis, Proceedings of a conference held at Đubrovnik, Yugoslavia, November 2-14, 1981. Lecture Notes in Mathematics 948, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 1-46.

48. Langer, R.E.: The boundary problem associated with a differential equation in which the coefficient of the parameter changes sign. Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929), 1-24.

49. Langer, R.E.: The asymptotic solution of ordinary differential equations of the second order with special reference to a turning point. Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 461-490.

50. Lax, P.D.: Symmetrizable linear transformations. Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 633-647.

51. Mason, M.: On boundary value problems of linear ordinary differential equations of second order. Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), 337-360.

52. McKelvey, R.W.: Asymptotic solutions and indefinite boundary value problems. Asymptotic solutions of differential equations and their applications, Proceedings of a symposium, Madison, 1964. J. Wiley, New York, 1964, 109-127.

53. Mikulina, O.F.: Razloženie po sobstvennym funkcijam differencial′nogo uravnenija vtorogo porjadka s odnoĭ točkoĭ povorota. Differencial′nye Uravnenija 7 (1971), 244-260.

54. Mingarelli, A.B.: Indefinite Sturm-Liouville problems. Ordinary and partial differential equations. Proceedings of the conference held at Dundee, Scotland, 1982. Lecture Notes in Mathematics 964, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 519-528.

55. Mingarelli, A.B.: On the existence of nonsimple real eigenvalues for general Sturm-Liouville problems. Proc. Amer. Math. Soc. 89 (1983), 457-460.

56. Naĭmark, M.A.: Lineĭnye differencial′nye operatory. Nauka, Moskva, 1969.

57. Reid, W.T.: Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space. Duke Math. J. 18 (1951), 41-56.

58. Richardson, R.G.D.: Contributions to the study of oscillation properties of the solutions of linear differential equations of the second order. Amer. J. Math. 40 (1918), 283-316.

59. Veselić, K: On spectral properties of a class of J-selfadjoint operators. I. Glasnik Mat. Ser. III 7 (1972), 229-248.

60. Weidmann, J.: Linear operators in Hilbert spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

61. Weyl, H.: Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1910), 442-467 i u H. Weyl; Gesammelte Abhandlungen, I. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

62. Iohvidov, I.S., Krein, M.G., Langer, H.: Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. Mathematische Forschung Band 9, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

63. Mason, M.: The expansion of a function in terms of normal functions. Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), 427-432.

64. Mardešić, S.: Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru. Prvi dio. Školska knjiga, Zagreb, 1974.